# Economía Ambiental y Control Óptimo

Elvio Accinelli Gamba* y Lucía A. Ruiz Galindo**

Noviembre, 2008

## 1. Introducción

A continuación se presenta una serie de problemas clásicos de control óptimo relacionados con políticas de cuidado y preservación del medio ambiente. Todos ellos están relacionados con la explotación óptima de recursos naturales, que por un lado es necesaria para el bienestar social y por el otro, supone la finalización de la existencia del recurso natural en cuestión o la generación de desperdicios tóxicos o contraproducentes para el bienestar social. Se trata pues de establecer una estrategia que permita optimizar la explotación y plantear políticas de sustentabilidad del medio ambiente. Obviamente no se dice que ésta sea la solución a todos los problemas ambientales, simplemente es un intento de modelar este conflicto sin renunciar a elevar el nivel de bienestar social.

El planificador desarrollará estas políticas a partir de las llamadas variables de control, con las que quedará establecida una trayectoria óptima de explotación del recurso y en algunos casos, un período óptimo durante el cual se llevará a cabo la explotación. El planificador decidirá en definitiva sobre la intensidad de la explotación en cada instante y la duración de la misma.

*Facultad de Economía, Universidad Autónoma de San Luis Potosí

**Departamento de Economía, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

## 2. Crecimiento óptimo y contaminación

Se considerará una economía en la que en cada instante $t$, la producción es proporcional a las existencias de capital, $y(t) = ak(t),\ a > 0$. Una fracción $s(t)$ del producto se invierte, por lo que la variación del capital en cada instante $t$ será igual a $s(t)k(t)$ y el resto se deja para el consumo, es decir que $c(t) = (1 - s(t))k(t)$.

Sea $z(t)$ los desechos acumulados en el instante $t$. Se supone que los desechos crecen proporcionalmente al producto y consecuentemente a la existencia de capital: $\dot{z}(t) = \alpha k(t),\ \alpha > 0$, que $k(0)$ y $z(0)$ están dados y que se pretende planificar el consumo para un periodo $[0, T]$, considerando que $k(T)$ está libre, es decir puede tomar cualquier valor, mientras la cantidad máxima de desperdicios generados no puede pasar más que cierto nivel $z_T$, es decir $z(T) \leq z_T$. Se quiere obtener una relación óptima entre la utilidad que el consumo de lo producido implica y la desutilidad que la acumulación de desechos produce.

La utilidad neta obtenida en el instante $t$ por la sociedad está definida por

$$u(t) = (1 - s(t))ak(t) - bz(t)$$

donde $b$ es una constante positiva. Cambiando la unidad de tiempo y la medida de $z(t)$, y suponiendo que $a = \alpha = 1$, el problema de control queda planteado en los siguientes términos:

$$\max_s \int_0^T [(1 - s(t))k(t) - bz(t)]dt \tag{1}$$

restringido a

$$\dot{k}(t) = s(t),\ k(0) = k_0,\ k(T) \text{ libre}$$

$$\dot{z}(t) = k(t),\ z(0) = z_0,\ z(T) \leq z_t$$

$$s(t) \in [0, 1)$$

siendo $T, b, k_0, z_0, z_T$ constantes positivas. Para evitar analizar muchos casos se considera que las constantes satisfacen las siguientes relaciones:

$$k_0 T < z_T - z_0,\ b < 1/2,$$
$$[1 - (1 - 2b)^{\frac{1}{2}}]b < T.$$

El problema de control tiene entonces dos variables de estado: $k$ y $z$, y una variable de control: $u$. Su hamiltoniano es

$$H = H(k, z, s, p_0, p_1, p_2, t) = p_0[(1 - s(t))k(t) - bz(t)] + p_1(t)s(t)k(t) + p_2(t)k(t), \tag{2}$$

siendo $p_1$ y $p_2$ las variables adjuntas correspondientes a $k$ y $z$ respectivamente.

Si $k^*$ y $s^*$ son las soluciones del sistema, entonces deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial H^*}{\partial k} = -p_0^*(1 - s^*(t) - p_1^*(t)s^*(t) - p_2), \tag{3}$$

$$\dot{p}_2^* = -\frac{\partial H^*}{\partial z} = p_0^* b. \tag{4}$$

Las condiciones de transversalidad son:

$$\dot{p}_1^*(T) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{p}_2^*(T) \leq 0 \ (\dot{p}_2^*(T) = 0 \text{ si } z^*(T) < z_T). \tag{6}$$

Se supone primeramente que $p_0^* = 0$. De la ecuación (3) se sigue que $p_2^*(t)$ es constante por lo que será $p^*(t) = p^*(T)$ $\forall t \in [0, T]$. Se sabe además que $(p_0^*, p_1^*(T), p_2^*(T)) \neq (0, 0, 0)$. Y por las condiciones de transversalidad (5) y (6) se tiene que $P_2^*(t) = p_2^*(T) < 0$. Resolviendo (3) se obtiene que

$$p_1^*(t) = -p_1^*(0) \int_0^t s(\tau) d\tau - \int_0^t p_2(\tau) exp \left[ \int_\tau^t p_2^*(u) du \right] d\tau$$

por lo que $p_1^*(t) < 0$ $\forall t \in [0, T)$.

La maximización del hamiltoniano supone que se selecciona $s(t) \equiv 0$, y posteriormente se determina que la variable de estado $k(t)$ será constante, por lo que $k^*(t) = k_0 = k(T)$. La segunda variable de estado $z^*$ satisface ser $z^*(t) = z_0 + k_0 T$ que por el supuesto sobre las constantes también satisface que $z^*(T) < Z_T$, de lo que sigue que $p_2^*(T) = 0$, pero como $p_2(T) < 0$, suponer que $p_0 = 0$ lleva a un absurdo. Por lo tanto, $p_0^* = 1$.

El hamiltoniano en $p_0^* = 1$ se puede escribir como sigue:

$$H = H(k, z, s, p_1, p_2, t) = [(p_1 - 1)s(t)k(t) + k(t) - bz(t)] + p_2(t)k(t),$$

siendo $k^*(t) > 0$. A partir de la condición de maximización del hamiltoniano

$$H(k^*, z^*, s^*, p_1^*(t), p_2^*(t)) \geq H(k^*, z^*, s, p_1^*(t), p_2^*(t))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} p_1(t) &> 1 \Rightarrow s^*(t) = 1, & (7)\\ p_1(t) &= 1 \Rightarrow s^*(t) \text{ queda determinado}, & (8)\\ p_1(t) &< 1 \Rightarrow s^*(t) = 0. & (9) \end{aligned}$$

y si $p_0 = 1$, la ecuacion (4) se puede escribir como

$$p_2^*(t) = b(t - T) + p_2^*(T) \tag{10}$$

y además por la condición de transversalidad $p_2^*(T) \leq 0$.

Como la primera condición de transversalidad (5) establece que $p_1^*(T) = 0$, por ser $p_1^*(t)$ continua debe existir $t'$ tal que $0 \leq t' < T$ y $t \in (t', T]$, $p_1^*(t) < 1$. Si $w$ es el menor $t'$ con esta propiedad, entonces $s(t) = 0$, $\forall t \in (w, T)$. Sustituyendo el valor de $p_2^*(t)$ obtenido en (10) en la ecuación adjunta correspondiente a $p_1^*(t)$ e integrando se obtiene

$$p_1^*(t) = (1 + p_2^*(T))(T - t) - \frac{1}{2}b(T - t)^2,\ t \in (w, T]. \tag{11}$$

El número $w$ es además la mayor raíz para la ecuación $p(t) - 1 = 0$, por lo que

$$w = T - \frac{1}{b}\left\{1 + p_2^*(T) - \left[(1 + p_2(T))^2 - 2b\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{12}$$

## 2.1. Casos posibles

a) Se supone que $(1 + p_2(T))^2 - 2b < 0$ o que $(1 + p_2(T))^2 - 2b > 0$, $w < 0$. En ambos casos $p_1^*(t) < 1$ para todo $t \in [0, t]$ es decir que $s^* \equiv 0$, en $[0, T]$. Como en este caso $k^* = k_0 = k_T$, se sigue que $z^*(T) = k_0 T + z_0 < z_T$ por las relaciones establecidas al inicio entre las constantes. Esto supone $p_2(T) = 0$, luego $w = T - \frac{1}{b}\{1 - (1 - 2b)^{\frac{1}{2}}\}$. Nuevamente usando las relaciones inicialmente impuestas se obtiene que $w < 0$, lo que es absurdo. Por lo tanto, $w$ debe ser un real positivo.

Así, la única posibilidad es que $(1+(p_2(T))^2 - 2b \geq 0$ y $w > 0$. La ecuación (11) indica el comportamiento de $p_1^*(t)$ a la derecha de $w$.

b) Se supone que a la izquierda de $wp_1(t) < 1$ excepto en un único punto $w$ donde $p(w) = 1$, en este caso $s^*(t) \equiv 0$ lo que no puede ser por las relaciones establecidas entre las constantes. Entonces $p(t) \geq 0$ para todo $t$ a la izquierda de $w$ tal que $0 \leq v$, $p_1^*(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, v]$ con $p_1^*(t) = 1$. La continuidad de $\dot{p}_i(t)$ en $w$ dice que a la izquierda de $w$ existe un intervalo $(h, w]$ donde $p_1^*(t)$ es decreciente. Luego, no puede ser $p(t) \equiv 1$ en $[0, w]$. Sea $v$ el más chico de los $t$ donde $p(t) > 1$. Integrando la ecuación () y sabiendo que $p(w) = 1$ se obtiene que

$$p_1^*(t) = ke^{w-t} - bt + bT + b - p_2(T), \ t \in (v, w), \tag{13}$$

donde $k = [(1 + p_2(T))^2]^{\frac{1}{2}} - b$.

Cuando $v > 0$, se satisface que $[p_1^*(t)]' = -ke^{w-t} - b$ por lo que si $k > 0$ entonces $p_1^*(t)$ es decreciente para todo $t \in (v, w)$ y $v$ no puede ser positivo. $v > 0$ si y sólo si $k < 0$, luego $p_1^*(t) < 1$, en un intervalo de la forma $(y, v)$. Si $y$ es el mínimo valor con esta propiedad, $\dot{p}_1^*(t)$ no cambia de signo en el intervalo, por lo tanto $p_i^*(t)$ es creciente en $(y, v)$. Como $y < v$ donde $p_1^*(t) < 1$, entonces $y = 0$. De lo anterior se tiene que si la solución de este problema existe (la condición de Fillipov-Cesari muestra que existe solución para este problema, las posibilidades de que sea una u otra de las aquí consideradas depende de los valores de los parámetros), entonces es de alguna de las siguientes formas:

1. Un solo cambio de $s^*$: $s^*(t) = 1$, en $[0, w]$ y $s^*(t) = 1$, en $(0, T]$.

$$k^*(t) = \begin{cases} k_0 e^t, & t \in [0, w] \\ k_0 e^w, & t \in (w, T]. \end{cases}$$

$$z^*(t) = \begin{cases} k_0 e^t + z_0 - k_0, & t \in [0, w] \\ k_0 e^w t + k_0 e^w (1 - w) + z_0 - k_0, & t \in [w, T]. \end{cases}$$

2. Dos cambios en $s^*$: $s^* = 0$ en $[0, v]$ y $s^* = 1$, en $[v, w]$ y $s^* = 1$ en $[w, T]$.

$$k^*(t) = \begin{cases} k_0, & t \in [0, v] \\ k_0 e^{t-v}, & t \in (v, w] \\ k_0 e^{w-v}, & t \in (w, T]. \end{cases}$$

$$z^*(t) = \begin{cases} k_0 t + z_0, & t \in [0, v] \\ k_0 e^{t-v} + z_0 - k_0(v - 1), & t \in (v, w] \\ k_0 e^{w-v}(t - w + 1) + k_0 v + z_0 - k_0, & t \in (w, T]. \end{cases}$$

Las relaciones $p_2^*(T) = 0$ o $p_2^*(T) < 0$ dependerán de los valores de $z^*(T)$ los que a su vez dependerán de los parámetros. Si $p_2^*(T) = 0$ entonces $w$ se obtiene a partir (27). En el caso en que haya que determinar $v$ este valor se obtiene usando (13) y el hecho de que $p(v) = 1$. El caso en que $p_2^*(T) \neq 0$ supone que $z^*(T) = z_T$. Esta ecuación y las planteadas en (27) y (13), darán valores para $w$ y $v$.

## 2.2. Crecimiento contaminante. Caso 2

El siguiente problema se encuentra estrechamente relacionado con el anterior. La interpretación de las variables es la misma, pero ahora no se introducirá la desutilidad producida por la contaminación aunque sí se considerará un límite superior en la misma. Se incorporará una nueva variable de control $u$, que representa la tasa de utilización del capital. Suponga que la contaminación decae exponencialmente con una tasa $a$ si $u(t) \equiv 0$. No hay acumulación de capital si $s(t) \equiv 0$. La máxima cantidad posible de contaminación está dada por $Z$ y por tanto $Z - z(t) \geq 0,\ \forall t$ en el periodo de producción. Las variables $u$ y $s$ serán las variables de control por lo que $[0,1] \times [0,1]$ es el espacio de estas variables. Como anteriormente, $z$ y $k$ representarán las variables de estado. El problema de control es:

$$\max_s \int_0^T [1 - s(t)]u(t)k(t)dt$$

restringido a:

$$\dot{k}(t) = s(t)u(t)k(t),\ k(0) = k_0,\ k(T) \text{ libre}, \tag{14}$$

$$\dot{z}(t) = u(t)k(t) - az(t),\ z(0) = z_0,\ z(T) \text{ libre}, \tag{15}$$

$$\dot{g}(k(t), z(t), t) = Z - z(t) \geq 0,$$

$$(s(t), u(t)) \in [0,1] \times [0,1].$$

Se incluyen también las siguientes restricciones en los parámetros: $k_0, z_0, Z, T$, son constantes positivas, relacionadas además por las condiciones:

$$z_0 < Z,\ T > 1,$$

$$(z_0 - k_0/a)e^{-aT} + k_0/a < Z.$$

Las que se consideran para discutir un número menor de casos posibles. La solución de este problema requiere del teorema de condiciones suficientes para la existencia de la solución (ver apéndice). El teorema de condiciones suficientes se aplica al caso en que $p_0 = 1$, por lo que el lagrangiano es

$$L(k, z, u, s, p_1, p_2, \lambda, t) = H(k, z, u, s, p_1, p_2, t) + \lambda(t)(Z - z(t)) \tag{16}$$

donde $p_1$ y $p_2$ son las variables adjuntas y $\lambda$ el multiplicador de Lagrange y $H$ el hamiltoniano dado por:

$$H(k, z, u, s, p_1, p_2, t) = [1 + (p_1(t) - 1)s(t) + p_2(t)]u(t)k(t) - ap_2(t)z(t). \tag{17}$$

Se quiere encontrar un conjunto de funciones $(k^*(t), z^*(t), u^*(t), s^*(t))$ que satisfaga las condiciones del teorema en el apéndice. Basta con que el conjunto propuesto satisfaga las siguientes condiciones:

La pareja $(u^*(t), s^*(t))$ maximiza la expresión:

$$[1 + (p_1(t) - 1)s(t) + p_2(t)]u(t)k(t) - ap_2(t)z(t), \ (u, s) \in U, \tag{18}$$

con

$$\lambda(t) \geq 0 \ (\lambda(t) = 0 \text{ si } z^*(t) < Z) \tag{19}$$

y satisface las ecuaciones

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial L^*}{\partial k} = -[1 + (p_1^*(t) - 1)(s^*(t) + p_2^*(t)]u^*(t), \ p_1^*(T) = 0, \tag{20}$$

$$\dot{p}_2^* = -\frac{\partial L^*}{\partial z} = ap_2^*(T) + \lambda(t), \qquad p_2^*(T) = 0. \tag{21}$$

La expresión (18) se debe cumplir para todo $t$ en el intervalo considerado, con excepción de los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$

$$p_1(T^-) - p_1(T) = \beta 0 = 0 \tag{22}$$

$$p_2(T^-) - p_2(T) = \beta(-1) = -\beta \tag{23}$$

$$\beta \geq 0 \ (\beta = 0 \text{ si } z^*(T) < z). \tag{24}$$

De acuerdo a (20), $p_i^*$ es una función continua en $t = T$. En el caso en que $(u^*(t), s^*(t))$ maximice el hamiltoniano en (17), también deberá maximiza la expresión

$$F(u, s, t) = [1 + (p_1(t) - 1)s + p_2(t)]u, \ u \in [0, 1], \ s \in [0, 1].$$

En general se tiene que

$$\max_{u,s} U(u,s,t) = \max_u[\max_s F(u,s,t)] = \max_s[\max_u F(u,s,t)].$$

Ahora bien

$$\max_s F(u,s,t) = u[\max_s[1 + p_1(t) - 1)s] + p_2(t)] = u[\max\{1, p_1(t)\} + p_2(t)]. \tag{25}$$

Ahora se debe resolver $\max_u[u \max\{1, p_1(t)\} + p_2(t)]$ se sigue que si

$$\begin{aligned} \max\{1, p_1(t)\} + p_2(t) &> 0 \rightarrow u^*(t) = 1 \\ \max\{1, p_1(t)\} + p_2(t) &< 0 \rightarrow u^*(t) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Si $u^*(t) = 0$ el valor de $s^*(t)$ no puede obtenerse de estas condiciones, pero para el caso $u^*(t) > 0$ se tiene que si

$$\begin{aligned} p_1(t) &> 0 \Rightarrow s^*(t) = 1 \\ p_1(t) &< 0 \Rightarrow s^*(t) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

A partir de (25), el valor máximo para la expresión

$$u[\max\{1, p_1(t)\} + p_2(t)] \text{ con } u \in [0,1]$$

es $r(t) = \max\{0, \max[1, p_1(t)] + p_2(t)\}$ por lo que el valor máximo para la expresión (17) definida por

$$[1 + p_1(t) - 1)s(t) + p_2(t)]u(t)k(t) - ap_2(t)z(t), \ (u,s) \in U \tag{28}$$

será

$$\hat{H}(k, z, p_1(t), p_2(t), t) = r(t)k - ap_2(t)z, \tag{29}$$

que es lineal y por lo tanto cóncava en $k$ y $z$ para todo $t \leq T$, por lo que se satisface la condición correspondiente para $\hat{h}$ en el teorema que muestra las condiciones suficientes, (ver apéndice).

La ecuación (19) toma la forma

$$\dot{p}_1(t) = -r(t), \ P(T) = 0. \tag{30}$$

Como $\dot{p}_1^*(t)$ es continua con $p_1^*(T) = 0$, entonces $p_1^*(t)$ es no creciente y no negativa para todo $t \in [0,T]$. Sea $t^* = \sup\{t : p_1^*(t) \geq 1\}$. Si el conjunto es vacío entonces sea $t^* = 0$, si

$t^* > 0$, $p_1^*(t) = 1$. Siendo $p_2^*(T) = -\beta \leq 0$ y como $\dot{p}_2 \geq 0$ entonces $p_2(t) \leq 0, \forall t \in [0, t]$. Se tienen tres casos posibles para $z^*(t)$,

1. $z^*(t) < Z \ \forall t \in [0, T]$.
2. $z^*(t) < Z \ \forall t \in [0, T)$.
3. $z^*(t) < Z \ \forall t \in [0, t']$ y $z^*(t) = Z \ \forall t \in [t', T]$.

En caso de verificarse el caso 1, entonces $\lambda(t) \equiv 0$. A partir de (19) y la condición $p_2^*(T) = 0$ se llega a $p_2(t) \equiv 0$. Por (25) se llega a que $u^*(t) \equiv 1$. Luego $s^*(t) \equiv 1 \ \forall t \in [0, t^*]$ y $s^*(t) \equiv 0 \ \forall t \in [t^*, T]$. A partir de las condiciones dadas en (26) y (27) más la condición $p_1^*(T) = 0$ se obtiene que $t^* = T - 1$. Así, se llega a que

$$k^*(t) = \begin{cases} k_0 e^t, & t \in [0, t^*] \\ k_0 e^{t^*}, & t \in (t^*, T]. \end{cases}$$

$$z^*(t) = \begin{cases} \left(z_0 - \frac{k_0}{a+1}\right) e^{-at} + \frac{k_0}{a+1} e^t, & t \in [0, t^*] \\ \\ \left(z_0 - \frac{k_0}{a+1} - \frac{k_0}{a(a+1)} e^{(t^*)(a+1)}\right) e^{-at} + \frac{k_0}{a} e^{t^*}, & t \in (t^*, T]. \end{cases} \tag{31}$$

con $t^* = (T - 1$.

Entonces si $z^*(t) < Z$ para todo $t$ en $[0, T]$ se encuentra la solución para el problema, $p_1^*(t)$ se encuentra fácilmente en este caso: $p_1^*(t) = e^{T-t+1}$ para $t \in [0, T-1]$ y $p_1^*(t) = T - t$ para todo $t \in (T-1, T)$.

Falta discutir los casos 2 y 3. Ahora se obtendrán otros candidatos a solución. ¿Cuál de ellos se debe considerar como solución?, dependerá de las relaciones entre $z^*(t)$ y $Z_T$.

# 3. Extracción óptima de un recurso natural

Suponga que en $t = 0$ se dispone de una cantidad $\bar{x}$ de cierto recurso natural (por ejemplo petróleo). Sea $T$ el tiempo que dura el contrato de una firma que explota el yacimiento. Sea $u(t)$ la tasa de extracción del recurso. Obviamente se deberá satisfacer que

$$\int_0^T u(t)dt \leq \bar{x}. \tag{32}$$

Suponga que el precio de mercado del recurso $t$ está dado por $q(t)$. El beneficio bruto en $t$ es entonces $q(t)u(t)$. Se asume que extraer el recurso tiene asociado un costo $c = c(u(t), t)$. La tasa instantánea de beneficios es entonces:

$$\pi(u(t), t) = q(t)u(t) - c(u(t), t).$$

y el beneficio total a valor presente está dado por

$$\Pi(u, T) = \int_0^T [q(t)u(t) - c(u(t), t)]\, e^{-rt} dt. \tag{33}$$

La empresa desea encontrar el tiempo $T$ óptimo para la duración del contrato y la tasa $u(t)$ de forma que maximice (32). Este problema puede ser resuelto mediante el cálculo de variaciones, para lo cual se considera que

$$x(t) = \bar{x} - \int_0^T u(t) dt,$$

entonces $u(t) = -\dot{x}(t),\ x(0) = \bar{x}$ y la restricción $x(T) \geq 0$ corresponde a la condición (31).

El problema de cálculo de variaciones es entonces

$$\max_{x,T} \int_0^T [-q(t)\dot{x}(t) - c(-\dot{x}(t), t)]\, e^{-rt} dt. \tag{34}$$

restringido a

$x(0) = \bar{x},\ x(T) \geq 0.$

La ecuación de Euler para este problema es

$$[-q(t) + c'_{\dot{x}}(-\dot{x}(t), t)]\, e^{-rt} = -K. \tag{35}$$

para alguna constante $K$. La condición de transversalidad es

$$[-q(T) + c'_{\dot{x}}(-\dot{x}(T), t)]\, e^{-rT} \leq 0. \tag{36}$$

La ecuación (25) toma la forma

$$\frac{\partial \pi(u(t), t)}{\partial u} = q(t) - \frac{\partial c(u(t), t)}{\partial u} = K e^{-rt}. \tag{37}$$

lo que dice que *a lo largo de la trayectoria óptima, la tasa de beneficios crece exponencialmente a una tasa igual al factor de descuento.*

Siendo $T$ libre, la transversalidad correspondiente es $(\pi - \dot{x}\pi'_u)_{t=T} = 0$, es decir,

$$[-q(T)\dot{x}(t) - c(-\dot{x}(T), T)]\, e^{-rT} - \dot{x}(T)\, [-q(T) + c'_{\dot{x}}(-\dot{x}(T), t)]\, e^{-rT} = 0, \tag{38}$$

como $\dot{x} = -u$ se obtiene la igualdad numérica

$$\frac{u(T)}{c(u(T), T)} = c'_u(u(T), T) = 1, \tag{39}$$

lo que dice que la extracción se detiene en el momento en que la elasticidad relativa de los costos es igual a 1. Obsérvese que en ningún momento se dijo que $u^*(t) \geq 0$, es decir, que esta solución en principio podría implicar tasas de extracción nagativas, o sea, devolver el recurso a la tierra. A continuación se analizará qué sucede si se impone la condición $u(t) \geq 0$.

## 3.1. Extracción óptima de un recurso natural con la condición $u(t) \geq 0$

Suponga ahora el problema

$$\max_{u,T} \int_0^T [q(t)u(t) - c(u(t), t)]e^{-rt} dt \tag{40}$$

restringido a

$\dot{x}(t) = -u(t),$

$x(0) = x_0 > 0,$

$x(T) \geq 0,$

$u(t) \geq 0.$

Como anteriormente, $x(t)$ es el recurso restante en el momento $t$, $q(t)$ el precio del recurso en el mercado y $c(u(t), t)$ es el costo de extraer el recurso con tasa $u(t)$ en el instante $t$. El hamiltoniano para este problema es

$$H(x, u, p, t) = p_0[q(t)u(t) - c(u(t), t)]e^{-rt} - p(t)u(t). \tag{41}$$

Suponga que $(u^*, x^*)$ es la solución de este problema en el intervalo $[0, T^*]$, es decir, $u^*$ maximiza $H(x^*, u, p^*, t)$ restringido a $u \geq 0$, excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*$, esto es, $u^*(t)$ maximiza

$$H(x^*, u, p^*, t) = p_0[q(t)u - c(u,t)]e^{-rt} - p^*(t)u \tag{42}$$

restringido a $u \geq 0$.

Por otra parte $p^*$ satisface la ecuación

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x} = 0. \tag{43}$$

Esta condición implica que $p^*(t)$ es una constante, $p^*(t) = \bar{p}$. Como siempre para $p_0$ se tiene que $p_0 = 0$ o $p_0 = 1$. Y las condiciones de transversalidad para $p_1$ establecen que

$$p_1^*(T) \geq 0 \ (p_1^*(T) = 0 \text{ si } x^*(T^*) > 0), \tag{44}$$

es decir que si $x^*(T) > 0$, entonces $p^*(t) \equiv 0$, en otro caso $p^*(t) \equiv \bar{p} \geq 0$. Mientras que la condición de transversalidad correspondiente a $T$ libre, plantea que $T^*$ debe satisfacer $H(x^*(T), u^*(T), p_1^*(T), T) = 0$, que en este caso toma la forma

$$H(x^*, u, p^*, t) = p_0[q(T^*)u(T) - c(u(T^*), T^*)]e^{-rT^*} = \bar{p}u(T^*). \tag{45}$$

Suponga ahora que $p_0 = 0$. Si $\bar{p} > 0$, $x^*(T) = 0$, pero se debe satisfacer (39), con $p_0 = \bar{p}$ y $p^*(t) = \bar{p} > 0$, esto supone que $u^*(t) = 0$ con excepción de los puntos de discontinuidad. Luego $x^*(t)$ será una constante, por lo que $x(T) = x_0 > 0$. Por tanto, $p_0 = 1$.

Si $c(u,t)$ es convexo en $u$, entonces la condición de maximización (39) restringida a $u \geq 0$ implica que si $u^*(t) = 0$ entonces $(\delta H/\delta u)(x^*, u^*, p^*, t) \leq 0$, mientras que si $u^*(t) > 0$, entonces $(\delta H/\delta u)(x^*, u^*, p^*, t) = 0$. Estas condiciones se traducen en

$$\left[q(t) - \frac{\partial c(u^*(t), t)}{\partial u}\right] e^{-rt} - \bar{p} \leq 0 \ (= 0 \text{ si } u^*(t) > 0). \tag{46}$$

Si $u^*(t) > 0$, entonces

$$q(t) - \frac{\partial c(u^*(t), t)}{\partial u} = \bar{p}e^{rt}, \tag{47}$$

lo que repite la condición (36) obtenida anteriormente con $K = \bar{p}$. El valor óptimo $T^*$ de duración del contrato debe verificar las condiciones anteriores, no obstante decir algo más acerca de este valor, implica decir algo más sobre por ejemplo, el costo $c(u,t)$. Condiciones posibles para obtener valores de $T^*$ son considerar $q(t) = \bar{q}$ y $c(u,t) = au^2 + bu - c$ con $a, b, c$ constantes positivas y $\bar{q} > b$.

## 3.2. Extracción óptima de un recurso natural usando tecnología importada

El problema que se plantea a continuación, si bien está relacionado con el anterior, es ligeramente diferente, por cuanto el objetivo será el de minimizar el tiempo en el se alcanza a partir de cierto valor inicial $x(0)$ de la producción del recurso natural, el valor $\bar{x}$. Sea $x(t)$ el valor de la producción del recurso en el tiempo $t$. Para la producción del recurso se utiliza tecnología que debe ser importada. El flujo de importación de esta tecnología en el tiempo $t$ es $y(t)$. Se supone que inicialmente se importa por un valor igual a $y(0)$ y se desea alcanzar el valor cero en el momento que el valor del recurso natural llega a ser $\bar{x}$. En definitiva se trata de pasar en el mínimo tiempo posible desde un estado $(x(0), y(0))$ a un estado $(\bar{x}, 0)$.

Las restricciones del problema son las siguientes:

1. El flujo de importación de la tecnología satisface $y(t) = \dot{k}(t)$, donde $k(t)$ es el total del capital invertido.

2. Para $\alpha > 0$ se satisface que $x(t) = \alpha k(t)$, de donde $\dot{x} = \alpha y(t)$.

3. No se puede controlar directamente el flujo de tecnología que se importa, pero sí $\dot{y}(t)$.

4. $u(t) = \dot{y}(t)$ con $u_0 \leq u(t) \leq u_1$.

Como el problema es de minimizar el tiempo escribimos el problema de control como

$$\max_{t \geq 0} \left\{ -\int_0^t dt = -rt \right\} \tag{48}$$

$$\dot{x}(t) = \alpha y(t)$$

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

$$u_0 \leq u(t) \leq u_1.$$

Suponga que $u_1 > 0$ y $u_0 < 0$. El hamiltoniano será entonces

$$H(x, y, u, t) = -p_0 + p_1(t)\alpha y(t) + p_2(t)u(t) \tag{49}$$

y las ecuaciones adjuntas son

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{50}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha p_1(t).$$

Por ser un problema de tiempo final $t_1$ libre, se debe satisfacer la condición de transversalidad $H(x^*(t^* =, y^*(t^*), u^*(t^*), t^*) = 0$, que en este caso se convierte en:

$$p_0 = p_1(t^*)\alpha y(t^*) + p_2(t^*)u(t^*). \tag{51}$$

La condición $(p_0, p_1(t), p_2(t)) \neq (0,0,0)$ $\forall t \in [0, t^*]$ implica que $(p_1^*(t^*), p_2^*(t^*)) \neq (0,0)$. Luego las ecuaciones (47) implican que $p_1^*(t) = \mathrm{A} \neq 0$ y consecuentemente $p_2^*(t) \neq 0$ para todo $t$. Mas aún, se sigue que

$$p_1^*(t) = A,\ p_2^*(t) = -\alpha A(t) + B \text{ con } (A, B) \neq (0,0). \tag{52}$$

Como $u^*(t)$ debe maximizar el hamiltoniano en (46) se sigue que

$$u^*(t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } -\alpha At + B > 0 \\ u_0 & \text{si } -\alpha At + B < 0. \end{cases} \tag{53}$$

por lo que el control es constante a trozos, teniendo a lo más un cambio en el instante $t^*$ en el que se satisface la igualdad $\alpha At = B$.

A partir de las ecuaciones diferenciales del problema (45) se obtienen los valores de $u^*(t)$ las funciones $x^*(t)$ e $y^*(t)$. En el intervalo de tiempo en el que $u^*(t) = u_1 > 0$ se tiene que

$$y^*(t) = u_1 t + b \tag{54}$$

siendo $b$ una constante. Consecuentemente

$$x^*(t) = \frac{1}{2}\alpha u_1 t^2 + \alpha b t + a. \tag{55}$$

Las constantes $a$ y $b$ dependen de las condiciones iniciales (C. I.). Eliminando $t$ se obtiene una relación entre $x$ y $y$ dada por

$$x = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{u_1}y^2 + \left(a - \frac{\alpha b^2}{u_1}\right). \tag{56}$$

A lo largo de esta parábola se tiene $\dot{y}(t) > 0$, es decir que $y$ crece con el tiempo. En el intervalo donde $u^*(t) = u_1 < 0$. Análogamente se obtendra la relación

$$x = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{u_0}y^2 + \left(a - \frac{\alpha b^2}{u_0}\right). \tag{57}$$

pero en este caso $y^*(t)$ decrece con $t$, pues $\dot{y}(t) < 0$ mientras que $x$ crece.

En resumen, la trayectoria óptima está formada por arcos de parábolas determinados por las condiciones iniciales $(x(0, y(0))$, el sentido del movimiento a lo largo de esta trayectoria dependerá del valor de $u^*(t)$. Cuando éste cambia, cambia el arco que determina la trayectoria. Esto sucede a lo más una vez a lo largo de la trayectoria óptima.

En particular hay dos pares de parábolas que pasan por el objetivo $(\bar{x}, 0)$, una correspondiente al caso $u^*(t) = u_1$ y la otra al caso $u^*(t) = u_0$. Pero dependiendo de en qué arco se está en cada una de esas parábolas inicialmente, se estará más lejos o más cerca del objetivo. Sólo un arco en cada parábola lleva al objetivo. Uno en la region $x > 0, y > 0$ del plano al que se llamará arco $C_2$ que corresponde al intervalo donde la solución $u^*(t) = u_0$, y otro en la región del plano $(x, y)$ donde $x > 0$ y $y < 0$ al que se nombrará arco $C_1$, correspondiente al intervalo en que $u^*(t) = u_1$. De acuerdo a las caracteristicas de nuestro problema las condiciones se ubicaran en el ortante positivo del plano $(x, y)$ y bajo el arco $C_2$. El control debe cambiar a lo más una vez en $t^* = \frac{B}{\alpha A}$. Por la trayectoria óptima comezará con el control en $u_1$, tomará por el arco de la parábola que pasa por las C. I. con el control en $u_1$, por lo que se dirijirá hacia el noroeste. Sigue por este arco hasta alcanzar el arco $C_2$ lo que ocurrirá en el instante $t$ para el que $\alpha At = B$, obsérvese que A y B no están aún determinadas, éstas dependen de las C. I: $(x(0), y(0))$. En este instante (inmediatamente) cambia el control a $u_0$ moviéndose ahora a lo largo del arco $C_2$, y se continua así hasta al alcanzar el estado $(\bar{x}, 0)$. Si las C. I. están sobre el arco $C_2$, no hay cambio de control, se sigue así hasta alcanzar el estado $(\bar{x}, 0)$.

*Las condiciones son Pontriaguin, éstas son solamente necesarias para la solución, es decir que si ésta existe deberá satisfacerlas*, no obstante no se ha demostrado su existencia. Es posible hacerlo usando técnicas propias de la teoría del control óptimo.

## 3.3. Extracción de un recurso natural con generación de contaminación

Considere el problema de extracción óptima de un recurso, cuya explotación produce contaminación, pero esta vez con un horizonte infinito. Para evitarse el problema de discutir la convergencia de la integral impropia, se considerará el criterio CU-óptimo, es decir, que un par $(^*(t), u^*(t))$ será óptimo si y solamente si la restricción de $(^*(t), u^*(t))$ al intervalo finito $[t_0, T]$ es óptima para toda $T \geq t_0$, con la condición terminal $x(t) = x^*(T)$. Se trata de extraer en forma óptima un recurso del subsuelo, con una tasa $u(t)$ siendo $q$ el costo de la extracción, $f(u(t))$ representa la calidad de cierto bien producido a partir del recurso cuyo precio unitario en el mercado es igual a 1 y se supone que $f$ es estrictamente cóncava. La contaminación existente en el intante $t$ es $y(t)$ y se acumula en forma proporcional a la producción del bien. El costo de eliminar los efectos negativos de la acumulación de desperdicios es $ay(t)$.

El problema de óptimización es entonces

$$\max_u \qquad \int_0^\infty [f(u(t)) - a(y(t) - qu(t)]e^{-rt} dt \tag{58}$$

$$\dot{x}(t) = -u(t),\ x(0) = x_0 > 0,\ \text{lím}_{t\to\infty} x(t) \geq 0$$

$$\dot{y}(t) = cf(u(t)),\ y(0) = y_0 > 0,\ y(\infty) \text{ libre.}$$

$$u(t) \in [0, b].$$

Su hamiltoniano

$$H(x(t), y(t), u(t), t) = p_0[f(u(t)) - ay(t) - qu(t)]e^{-rt} + p_1(t)(-u(t)) + p_2(t)cf(u(t)). \tag{59}$$

A partir de las ecuaciones adjuntas se obtiene:

$$\dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x} = 0,\ p_1(t) = \bar{p}_1 \text{ (constante)} \tag{60}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\tfrac{\partial H^*}{\partial y} = ae^{-rt},\ p_e(t) = -\tfrac{a}{r}e^{-rt} + K,\ K \text{ (constante).}$$

y por las condiciones de transversalidad, que $\lim\limits_{t\to\infty} p_2(t) = K = 0$ y que $\bar{p}_1 \geq 0$. El hamiltoniano se puede escribir como

$$H(x(t), y(t), u(t), t) = p_0(1 - ac/r)f(u(t))e^{-rt} - (qe^{-rt}\bar{p}_1(t))u(t) + ay(t)e^{-rt}. \tag{61}$$

que es una función cóncava en $(x, u, t)$ por lo que se cumple la condición correspondiente del teorema de Mangasarian.

Si $(x^*(t), y^*(t), u^*(t))$ satisface las condiciones suficientes de Mangasarian entonces para $p_0 = 1,\ u^*(t)$ debe maximizar

$$(1 - ac/r)f(u(t))e^{-rt} - (qe^{-rt}\bar{p}_1(t))u + ay(t)e^{-rt},\ para\ u \in [0, b].$$

y la expresión

$$g(u) = [hf(u) - qu]e^{-rt} - \bar{p}_1 u,$$

siendo $h = (1 - ac/r)$. Esta expresión es estrictamente cóncava en $u$ para todo $t$, luego $u^*(t)$ puede ser positiva si y solamente si $g'(0) > 0$. Lo cual se satisface si y solamente si $[hf'(u) - q]e^{-rt} > \bar{p}_1$ o equivalentemente $hf'(u) > q$. Se considerarán dos casos:

- Si $hf'(u) < q$, entonces $u^*(t) \equiv 0$, la explotación no se llevará a cabo pues los costos son muy altos.

- Si $hf'(u) > q$, $u^*(t) = b$ si y solamente si $g'(b) \geq 0$, pero puede observarse que las condiciones del problema hacen que $g'(b) < 0$.

Entonces $u^*(t)$ debe ser una función del intervalo $[0, b]$ para todo $t$, con lo cual $u^*(t)$ es tal que $g'(u^*(t)) = 0$, esto es,

$$f'(u(t)) = [\bar{p}_1 e^{rt} + q]\frac{1}{h}. \tag{62}$$

Si $\bar{p}_1 = 0$ la solución es $u^*(t) = \bar{u}$ que es una constante positiva, pero si este fuera el caso entonces $x^*(t) = \bar{u}t + x_0$ y por lo tanto no se cumpliría la condición terminal $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Por lo que entonces $\bar{p}_1 > 0$, derivando con respecto a $t$ ambos miembros de la igualdad (50) siendo $f"(u) < 0$ se llega a que $u^*(t)$ debe ser una función decreciente.

# 4. Explotación óptima de una población de peces

Una población de peces crece naturalmente $f(x(t))$, siendo $x(t)$ la población existente en el momento $t$. Suponga que el precio del pescado es $a$ y su captura es función de la población existente y del esfuerzo $u(t)$ realizado para capturarlo, es decir $g(x(t), u(t))$ representa la cantidad de peces capturados en el instante $t$. Restringiéndose a que la población crece de acuerdo a la ley

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - g(x(t), u(t))$$

se trata de maximizar el funcional

$$\int_0^{\infty} [ag(x(t), u(t)) - u(t)]e^{-rt}dt,$$

donde $r$ es la tasa de descuento. Se asumirán también las restricciones $u(t) \geq 0$ y $x(t) > 0$, por otra parte $u^*(t) \in [0, b)$. Obsérvese que si $t$ es suficientemente grande entonces se satisface que

$$g'(0) = [hf'(0) - q]e^{-rt} - \bar{p}_1 = 0,$$

lo que $u^*(t)$ es positiva en un intervalo $[0, t^*)$ y $u^*(t) \equiv 0$ a partir de $t^*$. El valor de $t^*$ puede encontrarse como función de $\bar{p}_1$ a partir de la igualdad $f'(0) = (q + \bar{p}_1 e^{rt})\frac{1}{h}$. Luego $u(t, \bar{p}_1) = 0, \forall t \geq t(\bar{p}_1)$. Con lo cual, considerando $u^*(t) = \bar{u}$ siendo $\bar{u} \in (0, b)$ constante, el recurso se habrá agotado al llegar a $t(\bar{p}_1)$.

# 5. Apéndice

Considere el siguente problema de optimización para $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ variables de estado y $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_s(t))$ variables de control y

$$f_0 : R" \times R \to R"$$

funciones continuas:

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \qquad (A) \tag{63}$$

restringido a

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ x(t_0) = x' \qquad \text{(B)}$$

y las condiciones terminales

$$x_i(t_1) = x_i^1,\ i = 1, \ldots, l \qquad (C_1)$$

$$x_i(t_1) \geq x_i^1,\ i = l+1, \ldots, m \qquad (C_2)$$

$$x_i(t_1) \text{ libre } i = m+1, \ldots, n \qquad (C_3)$$

las restricciones para las variables de control

$$u(t) \in U,\ U \subset R^r \qquad \text{(D)}$$

y las restricciones

$$g_j(x(t),t) \geq j,\ j=1,2,\ldots,s \qquad \text{(E)}$$

se asume la continuidad de $g=(g_1,\ldots,g_s)$ así como de la matriz $g'_x$.

Se dirá que el par $(\bar{x},\bar{u})$ es *admisible* si $u(t)$ es continua a trozos en el intervalo $[t_0,t_1]$ y además si satisface que $\dot{x}=f(\bar{x},\bar{u},t)$ satisface todas las restricciones del problema (51). Se tiene el siguiente teorema

**Teorema 5.1.** *Considere el par admisible $(x^*,u^*)$ para el problema (51). Suponga que existe un vector de funciones $p(t)=(p_1(t),\ldots,p_n(t))$ que es continuo y diferenciable a trozos en $[t_0,t_1]$. Suponga también que existe un vector funcional $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_s(t))$ continuo a trozos y números $\beta_j,\ j=1,\ldots,s$ tales que para $p_0=1$ se satisface que:*

$$u(t) \text{ maximiza } H(x^*(t),u,p^*(t),t), \qquad u \in U, \qquad (A) \tag{64}$$

$$\lambda_j(t) \geq 0\ (=0 \text{ si } g_j(s^*(t),u(t),t)>0), \qquad j=1,\ldots,s\ \forall t \qquad (B)$$

$$\dot{p}_i(t) = \tfrac{\partial L(x^*(t),u^*(t),p^*(t),\lambda^*(t),t)}{\partial x_i} \qquad j=1,\ldots,n \qquad (C)$$

En $t_1$ $p_i(t_1)$ puede saltar, en cuyo caso

$$p_i(t_i)-p_i(t_1)=\textstyle\sum_{j=1}^{s} x\beta_j \tfrac{\partial(x^*(t_1),t_1)}{\partial x_i} \qquad i=1,\ldots,n \qquad (D)$$

$$\beta_j \geq 0\ (=0 \text{ si } (g_j(t_1),t_1)>0 \qquad j=1,\ldots,s \qquad (E)$$

$$p_i(t_1) \text{ sin condiciones} \qquad i=1,\ldots,l \qquad (F_1)$$

$$p_i(t_1) \geq 0\ (=0 \text{ si } x_i^*(t_1)>x_i^1) \qquad i=l+1,\ldots,m \qquad (F_2)$$

$$p_i(t_1)=0 \qquad i=m+1,\ldots,n \qquad (F_3)$$

$$\hat{H}(x(t),p(t),t)=\max\nolimits_{u\in U} H(x,u,p(t),t)$$

$$u \in U, \qquad (A)u(t)\in U,\ U\subset R^r, \qquad (G)$$

es cóncava en $x \in R^n$,

$$g(x,t) \text{ es cuasi-cóncava en } x \tag{H}$$

Entonces $(x^*(t), u^*(t))$ resuelve el problema (51).

# 6. Bibliografía.


Chiang, A., (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill.

Kamien, M. I. y N. L. Schwartz, (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Managment*. Advanced Textbooks in Economics. 2a. ed. North Holland.

Léonard, D. y N. Van-Long, (1994). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge University Press.