DESARROLLO TECNOLÓGICO E INCREMENTO DE LA HABILIDAD LABORAL: UN MODELO DE CRECIMIENTO

Salvador Rivas-Aceves

RESUMEN

En el marco de una economía cerrada con rendimientos constantes a escala y productos marginales decrecientes, se estudia el efecto que tiene la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral por medio de un gasto gubernamental financiado a través de un impuesto sobre la renta. Bajo estructuras analíticas en términos reales y nominales, se caracterizan las condiciones iniciales de las trayectorias óptimas de consumo, ocio, capital y producto. Asimismo se determina la tasa de crecimiento económico. Finalmente, se mide el impacto sobre el bienestar económico que tienen los precios, el salario, la tasa de interés, los impuestos, el gasto aplicado al desarrollo tecnológico y el gasto destinado al incremento de la habilidad laboral.

Palabras clave: crecimiento endógeno, gasto de gobierno, cambio tecnológico.
Clasificación JEL: O33, 038.

Proyecto

1. Presentación

2. El modelo base

3. El gobierno, el avance tecnológico y la habilidad laboral

3.1. Modelación en términos reales

3.2. Modelación en términos nominales

4. Conclusiones

1. Presentación

Dentro de la teoría del crecimiento el origen fundamental del cambio tecnológico se encuentra en la empresa, el desarrollo pionero que introdujo el progreso tecnológico al análisis de crecimiento fue elaborado por Harrod (1939). No obstante, las principales aportaciones en materia de crecimiento endógeno con cambio tecnológico se deben a Romer (1986) y Lucas (1988). Bajo este marco teórico general se concibe el cambio tecnológico como un proceso que explica las modificaciones en las condiciones de producción de las firmas en función de cambios cualitativos o cuantitativos de los insumos, tales como el stock de conocimiento, el capital humano y el trabajo calificado.

Posteriormente, Romer (1990) muestra que, con un solo sector con cambio tecnológico de tipo endógeno, la tasa de cambio tecnológico es sensible a la tasa de interés, en donde toda la investigación realizada se destina a la producción de bienes de consumo. Por otro lado, Uzawa (1965) encontró que el cambio tecnológico se puede dar a través de un incremento en la eficiencia laboral, que a su vez no depende de la cantidad de capital usado en el proceso productivo. Sin embargo, hasta la fecha no existe un desarrollo teórico que nos permita establecer los efectos sobre el crecimiento que puede tener la participación del gobierno en el cambio tecnológico a través del gasto.

Muchos autores han introducido el gasto del gobierno como un argumento de la función de producción, sólo para analizar el impacto que éste tiene sobre la capacidad productiva de la economía, por ejemplo Barro (1990), Barro y Xala-i-Martin (1992), Futagami-Morita-Shibata (1993), Glomm y Ravikumar (1994), Cazzavillan (1996) y Turnovsky (1996). Otro tipo de desarrollos teóricos analizan el impacto que tienen las políticas económicas sobre el crecimiento como Turnovsky (1993), Easterly-King-Levine-Rebelo (1994) y Caminati (2001).

La presente investigación, en el marco de una economía cerrada con rendimientos constantes a escala y productos marginales decrecientes, estudia el efecto que tiene la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral por medio de un gasto gubernamental financiado por un impuesto sobre la renta. Bajo estructuras analíticas en términos reales y nominales, se caracteriza el equilibrio macroeconómico y se determina la tasa de crecimiento económico. Se mide el impacto sobre el bienestar económico que tienen los precios, el salario, la tasa de interés, los impuestos, el gasto aplicado al desarrollo tecnológico y el gasto destinado al incremento de la habilidad laboral.

Para ello, el trabajo se estructura de la siguiente forma; en el apartado 2 se establecen las bases del modelo; posteriormente, en el apartado 3 se introduce el papel del gobierno como agente promotor del crecimiento a través de las actividades ya mencionadas, dentro de estructuras analíticas en términos reales y nominales. Por último, se presentan las conclusiones, limitaciones y agenda pendiente de la investigación en el apartado 4.

2. El modelo base

Para poder resaltar la importancia que tiene la participación del gobierno tanto en el desarrollo tecnológico, como en la generación de una mayor habilidad laboral, se describe a continuación el modelo base de crecimiento endógeno, como punto de partida del presente análisis.

Inicialmente considere que en la economía viven agentes económicos con dotaciones y preferencias idénticas, que tienen vida infinita y que la técnica para producir un único bien está dada. Se trata de una nación que no sostiene intercambios comerciales con otras economías, por lo que la economía es cerrada, y en donde los consumidores buscan maximizar el nivel de utilidad que obtiene gracias al consumo. Suponga que dicha utilidad está dada por:

$$U = \int_0^\infty u(c) e^{-\delta t} dt, \tag{1}$$

en donde c es el consumo *per capita* y δ es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente. Para simplificar la notación se omitirán los subíndices *t* en las variables, sin embargo el lector deberá tener presente que se trata de variables que dependen del tiempo en todo momento. Suponga también que la utilidad por el consumo de los individuos está determinada por la siguiente función:

$$u(c) = \ln c. \tag{2}$$

Este tipo de especificación del consumo satisface que $u'(c) > 0$ y $u''(c) < 0$. Por lo tanto, la utilidad marginal que le genera al consumidor una unidad adicional de consumo del bien, es positiva pero decreciente. En consecuencia la satisfacción que proporciona dicho consumo aumenta pero cada vez en menor medida. Por otro lado, se supone que el consumidor posee una empresa por lo que simultáneamente toma decisiones de consumidor y de productor. Debido a que la técnica está dada, todos los productores enfrentan las mismas condiciones de producción representadas por:

$$f(k) = Ak. \tag{3}$$

Este tipo de función de producción fue utilizada por Harrod (1939) y por Rebelo (1991), y muestra que el producto marginal del capital es positivo, es decir $A > 0$. Esta variable expresa además el nivel tecnológico de la economía. Dado que el individuo asume los roles de consumidor y productor al mismo tiempo, entonces la restricción presupuestal del consumidor se puede expresar como:

$$k_0 = \int_0^\infty c e^{-At}\, dt. \tag{4}$$

El problema de optimización resultante está determinado por (2) y (4), del cual resultan las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{1}{c} = \lambda, \tag{5}$$

$$\dot{k} = Ak - c, \tag{6}$$

$$A\lambda = -\dot{\lambda} + \delta\lambda, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} ke^{-At} = 0. \tag{8}$$

En esta economía los niveles de equilibrio de consumo, capital y producto son respectivamente:

$$c = k_0\delta, \tag{9}$$

$$k = k_0, \tag{10}$$

$$y = Ak_0, \tag{11}$$

en donde k_0 es el capital inicial. Se puede observar que el consumo depende de las preferencias de los individuos δ, del capital inicial con que cuenta el aparato productivo y del coeficiente tecnológico de la economía A. Por su parte, el nivel del capital de equilibrio sólo depende del capital inicial, mientras que el nivel de producto está en función del nivel tecnológico de la economía y del capital inicial. Como la tasa a la que crece el consumo, el capital y, por lo tanto, el producto depende de la diferencia $(A - \delta)$, entonces la tasa de crecimiento balanceado de la economía es:

$$\varphi = A - \delta. \tag{12}$$

La conclusión parcial que nos da el modelo base consiste en que la tasa de crecimiento en todos los sectores de la economía depende del nivel tecnológico de la misma y de las preferencias de los individuos. Por lo tanto resulta evidente que si $A > \delta$, entonces todos los sectores crecen, mientras que si $A < \delta$, entonces decrecen. Observe que dicho crecimiento es balanceado ya que se presenta de igual manera en todos los sectores. En consecuencia, países con coeficientes tecnológicos altos crecen a tasas mayores. Estos resultados (modelo *Ak*) son bien conocidos, a pesar de ello, el desarrollo realizado en este apartado tiene como objetivo enfatizar que una economía crecerá a un mayor ritmo si tiene un nivel tecnológico mayor. Lo anterior resulta pertinente por que en la presente investigación se analiza el efecto del cambio tecnológico vía el gasto gubernamental.

3. El gobierno, el avance tecnológico y la habilidad laboral

La mayoría de los modelos de crecimiento endógeno están construidos en términos reales porque permiten obtener resultados analíticos más claros en términos de las principales variables que determinan el crecimiento económico. Lo anterior, obviamente implica la omisión de posibles efectos, sobre el crecimiento, debido a modificaciones en variables nominales como el salario y los precios. Por lo tanto, la introducción del cambio tecnológico generado por el gobierno se realizará, en primer lugar, desde una estructura analítica en términos reales, para después revisar los efectos en una estructura en términos nominales.

3.1. Modelación en términos reales

Una vez que ya se han planteado las bases sobre las cuales opera la economía, se introduce ahora la participación del gobierno de dos formas: la primera a través del fomento tecnológico y la segunda por medio del incremento de la habilidad laboral. Al respecto, la presente investigación constituye una ampliación del análisis realizado por Rivas-Aceves y Venegas-Martínez (2008a y 2008b). En cuanto al avance tecnológico suponga que el gobierno interviene en el desarrollo de tecnología, ya sea mediante apoyos al sector empresarial para realizar actividades de innovación y desarrollo, o por medio de investigación tecnológica realizada al interior del gobierno. En ambos casos la productividad del capital se ve modificada, de tal manera que la función de producción, en una primera parte, toma la siguiente forma:

$$f(k) = Ag_a k, \tag{13}$$

en donde $g_a > 0$ es el gasto que el gobierno realiza bajo las formas antes mencionadas para la generación del avance tecnológico. Por ende, significa que una parte del producto tiene como insumo el nivel tecnológico existente hasta ese momento en la economía. Por otro lado, suponga ahora que los individuos deciden participar en el proceso de producción proporcionando su mano de obra, y que del total de tiempo naturalmente disponible por un ser humano en un día (T), se pude destinar tiempo para el ocio (l) y tiempo para el trabajo (η). Quiere decir entonces que se cumple con lo siguiente:

$$T = l + \eta, \tag{14}$$

nótese que $T = 1$ ya que sólo se pueden trabajar como máximo 24 horas al día. Además, suponga que sólo se puede destinar al proceso productivo mano de obra que sea capacitada por el gobierno, esta capacitación se da en el sentido de que incrementa la habilidad para el manejo de las nuevas tecnologías que ya han sido generadas por la intervención del gobierno en el avance tecnológico. En otras palabras, es necesario capacitar a la mano de obra para el uso de la tecnología, cada vez que ésta es desarrollada. En consecuencia el proceso productivo, una vez que se incorporan el nivel tecnológico y la habilidad laboral, está determinado finalmente por la siguiente función de producción:

$$f(k,\eta) = Ag_a k + \eta g_h k, \tag{15}$$

en donde $g_h > 0$ es el gasto que el gobierno ejerce para lograr un incremento en la habilidad laboral. Lo que está detrás de este supuesto es que el producto es resultado sólo de la producción a través de dos tipos de capital, uno que no necesita del manejo de los trabajadores y otro que sí. Por otro lado, el gobierno obtiene los recursos que utiliza para la generación del desarrollo tecnológico y para el incremento en la habilidad laboral, a través de un impuesto sobre la renta (τ) que aplica al sector empresarial. Por lo tanto, la restricción del gobierno se define de la forma siguiente:

$$\tau y = g_a + g_h \tag{16}$$

En este punto también se puede deducir que, el gasto total que puede realizar el gobierno está determinado por la cantidad de recursos que destina a la generación de nuevas tecnologías, ya sea como apoyo a la empresa o como actividades de investigación, más la cantidad de recursos que destina para la capacitación de la mano de obra en el manejo de las mismas. El impuesto sobre la renta ocasiona que ahora el nivel de producto (y) de la economía esté dado por:

$$y = (Ag_a k + \eta g_h k)(1 - \tau). \tag{17}$$

El análisis de la economía, hasta ahora, es en términos reales ya que se supone que el precio del bien de consumo y el salario son constantes, y cumplen con $p = w = 1$. Podemos ahora definir la restricción presupuestal del consumidor, la cual está determinada por la ecuación:

$$k_0 = \int_0^\infty c e^{-[(Ag_a + \eta g_c)(1-\tau)]^t}\, dt + \int_0^\infty \eta e^{-[(Ag_a + \eta g_c)(1-\tau)]^t}\, dt. \tag{18}$$

Como el individuo ahora puede obtener satisfacción por el consumo y por el ocio, entonces la función de utilidad resultante es:

$$u(c) = \alpha \ln c + (1 - \alpha) \ln l, \tag{19}$$

en donde $\alpha > 0$ mide la proporción de utilidad que genera el consumo y el ocio. En consecuencia, el problema de optimización que resulta de la introducción del gobierno en las actividades económicas está dado por (18) y (19), y sus condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\alpha}{c} = \lambda, \tag{20}$$

$$\frac{(1-\alpha)}{l} = -\lambda, \tag{21}$$

$$\dot{k} = (Ag_a k + \eta g_h k)(1-\tau) - \eta - c, \tag{22}$$

$$(Ag_a k + \eta g_h k)(1-\tau)\lambda = -\dot{\lambda} + \delta\lambda, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to\infty} k e^{-(Ag_a+\eta g_h)(1-\tau)t} = 0. \tag{24}$$

Las condiciones iniciales resultantes al tiempo $t = 0$ para el consumo, ocio, capital y producto de la economía están representadas por:

$$\hat{c}_0 = \alpha\delta k_0 - 1, \qquad k_0 > \frac{1}{\alpha\delta}, \tag{25}$$

$$\hat{l}_0 = (\alpha - 1)\delta k_0 - 1, \qquad \delta k_0 > \frac{1}{\alpha - 1}, \tag{26}$$

$$\hat{k}_0 = k_0, \tag{27}$$

$$\hat{y}_0 = (Ag_a + \eta g_h)(k_0)(1-\tau), \tag{28}$$

en donde ^ denota las nuevas cantidades en esta economía y k_0 una vez más es el capital inicial. Se aprecia que el nivel de consumo depende de las preferencias de los individuos, del capital inicial y de la proporción de utilidad que generan al individuo, por lo que aumentos en cualquiera de ellos, incrementa el nivel de consumo de los individuos. Análogamente, el nivel de ocio depende de manera inversa de los mismos parámetros, así que incrementos en sus determinantes disminuyen el ocio. Por su parte, el nivel de capital sólo está determinado por el capital inicial de la economía. Finalmente, el producto depende del nivel tecnológico existente en la economía, del gasto que el gobierno realice en desarrollo tecnológico y habilidad laboral, del nivel de trabajo utilizado en el proceso productivo, del capital inicial y del impuesto sobre la renta. Significa que, a mayor avance tecnológico y a mayor habilidad laboral el producto crece. Bajo estos argumentos, la nueva tasa de crecimiento económico balanceado (ψ) de la economía es:

$$\psi = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)] - \delta. \tag{29}$$

Para que el crecimiento sea positivo es necesario que $\tau < \delta$, y además que se cumpla con cualquiera de las siguientes condiciones; que $(g_a + g_h) > \delta$, $(A + \eta) > \delta$, o bien que $(Ag_a + \eta g_h) > \delta$. En caso contrario el crecimiento económico será negativo. Por otro lado, debido a la participación del gobierno en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral, los niveles de producto y consumo en esta economía son mayores a los mostrados en el apartado anterior en donde la participación del gobierno era nula, es decir, $\hat{y} > y$ y $\hat{c} > c$. Lo anterior se cumple si y sólo si se verifican las condiciones arriba mencionadas, por lo tanto las desigualdades correspondientes que a continuación se muestran son válidas:

$$[(Ag_a + \eta g_h)(k_o)(1-\tau)] > Ak_0, \tag{30}$$

$$(\alpha\delta k_0 - 1) > k_0\delta. \tag{31}$$

De igual forma, se puede observar que la tasa de crecimiento económico es mayor con la participación del gobierno en el avance tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral, ya que $\psi > \varphi$. En consecuencia, el impacto que tiene la participación del gobierno en las actividades tecnológicas y laborales ya mencionadas es positivo, debido a que incrementa el coeficiente tecnológico de la economía que a su vez genera un mayor crecimiento.

3.2. Modelación en términos nominales

Hasta ahora se había supuesto que los precios y el nivel de salarios son constantes e iguales a la unidad, con la finalidad de mostrar las relaciones existentes en términos reales entre las variables propuestas. Sin embargo, en esta parte se levantará dicho supuesto para evaluar los efectos que tienen los precios y los salarios en la economía ya descrita. Ahora también se puede conocer el nivel del salario (w) y de la tasa de interés (r) de equilibrio, los cuales equivalen a la productividad marginal de los factores de producción, por lo tanto:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = (Ag_a + \eta g_h)(1-\tau) = r, \tag{32}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = g_h k(1-\tau) = w, \tag{33}$$

Nótese que, el nivel de salario de equilibrio ahora es mayor que el correspondiente al del modelo base porque el gasto de gobierno, destinado al incremento de la habilidad laboral, modifica la productividad del trabajo de manera positiva. La habilidad en el manejo de nueva tecnología que proporciona el sector laboral es retribuida por dicho salario, de tal suerte que el productor representativo se enfrenta a un costo salarial $(w\eta)$. Al incorporar los precios y el salario, junto con la relación encontrada en (32) a (18), el consumidor representativo dueño de la empresa tiene como nueva restricción presupuestal la siguiente:

$$k_0 = \int_0^\infty pce^{-rt}\,dt + \int_0^\infty w\eta e^{-rt}\,dt, \tag{34}$$

en donde p es el precio del bien de consumo. Como se mantiene la misma función de utilidad en términos del consumo y el ocio, entonces el problema de optimización está ahora dado por (19) y (34), con las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\frac{\alpha}{pc} = \lambda, \tag{35}$$

$$\frac{(1-\alpha)}{wl} = -\lambda, \tag{36}$$

$$\dot{k} = rk - w\eta - pc, \tag{37}$$

$$r\lambda = -\dot{\lambda} + \delta\lambda, \tag{38}$$

$$\lim_{t\to\infty} ke^{-rt} = 0. \tag{39}$$

Las nuevas condiciones iníciales al tiempo $t = 0$ de esta economía compuesta por el consumo, el ocio, el capital y el producto, de manera conjunta con (33) y con la tasa de crecimiento, son:

$$\bar{c}_0 = \frac{\alpha[\delta k_0 - g_h k_0(1-\tau)]}{p}, \quad \delta k_0 > g_h k_0(1-\tau), \tag{40}$$

$$\bar{l}_0 = \frac{(\alpha-1)[\delta k_0 - g_h k_0(1-\tau)]}{g_h k_0(1-\tau)}, \quad \alpha > \delta k_0 > g_h k_0(1-\tau), \tag{41}$$

$$\bar{k}_0 = k_0, \tag{42}$$

$$\bar{y}_0 = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)k_0], \tag{43}$$

$$\psi = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)] - \delta. \tag{44}$$

Inmediatamente se puede observar que la tasa de crecimiento de la economía en términos nominales es la misma que la de la economía en términos reales. También se aprecia que el consumo depende de manera positiva de la tasa subjetiva de descuento y del capital inicial, pero ahora mantiene una relación inversa con los precios, por lo que aumentos en el precio del bien disminuyen su consumo. Análogamente, existe una relación inversa entre el ocio, los precios y el salario en términos de la ecuación (33), de tal forma que aumentos en el nivel de gasto de gobierno para incrementar la habilidad laboral originan una caída en el ocio. La disminución del ocio necesariamente implica un aumento en la cantidad de horas trabajadas debido a la relación definida en (14), y dado que la tasa de crecimiento expresada en (29) se mantiene para esta estructura analítica en términos nominales, en consecuencia el aumento en la cantidad de trabajo ocasiona que la tasa de crecimiento sea mayor. Por lo tanto, el aumento en el salario a través de g_h afecta de manera indirecta a la tasa de crecimiento en sentido positivo, dicho efecto no se presenta cuando el análisis se hace en términos reales. El aumento en el capital inicial tiene el mismo efecto, ya que se cumple con $\delta k_0 > g_h k_0(1-\tau)$. Por el lado del producto se tiene que $\bar{y} > y$, ya que se cumple la siguiente desigualdad:

$$[(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)k_0] > Ak_0. \tag{45}$$

La incorporación de los precios y el salario al análisis, de manera conjunta con la introducción del papel del gobierno como agente promotor del crecimiento a través del desarrollo tecnológico y el incremento de la habilidad laboral, muestra que los niveles de consumo, producto y crecimiento son mayores que los mostrados en ausencia de los mismos. Más aún, incrementos en el salario tienen efectos positivos sobre el crecimiento toda vez que provocan aumentos en la cantidad de trabajo. Por lo tanto, un aumento en g_h tiene un efecto positivo de manera directa sobre el crecimiento y uno de manera indirecta vía los salarios. Esta relación no aparece cuando el análisis se hace en términos reales.

4. Conclusiones

Con una estructura analítica en términos reales y otra en términos nominales, se desarrolló un modelo de crecimiento endógeno con agentes que tienen vida infinita, rendimientos constantes a escala y con la economía cerrada. En donde la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación del avance tecnológico y el incremento de la habilidad laboral, por medio de un gasto gubernamental financiado con impuestos sobre la renta, generan un mayor crecimiento económico. Bajo ambas estructuras el nivel de consumo, capital y producto es mayor cuando el gobierno interviene en dichas actividades que en ausencia del mismo. El impacto que tienen aumentos en el nivel de gasto, destinados al desarrollo tecnológico y al incremento de la habilidad laboral, sobre el bienestar económico de los hogares y sobre la tasa de crecimiento económico es positivo. Al aumentar los niveles de gasto antes mencionados, aumenta la tasa de interés real, ya que está última depende de manera directa de ambos tipos de gasto, lo que tiene una vez más un impacto positivo sobre el crecimiento. Por su parte, incrementos en el nivel de impuestos provocan disminuciones en la calidad de vida de los agentes y una caída de la tasa de crecimiento. Razón por la cual, una asignación eficiente de los recursos destinados al desarrollo tecnológico y al incremento de la habilidad laboral por parte del gobierno es deseable, ya que con ello se evitarán incrementos en el nivel de impuestos que generen efectos negativos.

En particular, cuando la estructura analítica está en términos nominales, un incremento en los salarios, provocado por un aumento en el gasto de gobierno destinado a la habilidad laboral, ocasiona un incremento en el trabajo que desemboca en un alza de la tasa de crecimiento económico. Al mismo tiempo tiene un efecto positivo sobre el bienestar económico, por lo que un aumento en dicho gasto es recomendable porque fomenta el crecimiento de manera indirecta vía los salarios. Como el nivel de salario depende del gasto de gobierno destinado al incremento de la habilidad laboral, entonces un aumento en el mismo tiene efectos positivos sobre el bienestar de los hogares ya que aumentos en el salario ocasionan el mismo resultado en el bienestar. En el caso contrario, caídas en el salario ocasionan una caída muy fuerte en el bienestar económico de los hogares.

Por otra parte, los resultados de la teoría respecto a modificaciones en los precios se mantienen bajo las hipótesis establecidas en esta investigación respecto a la incorporación del gobierno como generador del cambio tecnológico. Es decir, aumentos en los precios tienen un efecto negativo sobre el consumo y, por ende, sobre el bienestar. Finalmente, los impactos del aumento en la tasa de interés sobre la tasa de crecimiento y el bienestar son positivos.

Dentro de las principales limitaciones que caracterizan este tipo de análisis se pueden enlistar las siguientes: suponer que el gobierno sólo interviene en el desarrollo tecnológico y en el incremento de la habilidad laboral es poco real, ya que existen muchas otras más actividades que realiza este agente económico, por lo que ampliar el papel del gobierno resulta necesario. Análogamente, suponer que el gobierno sólo obtiene recursos a través de un único impuesto sobre la renta es muy restrictivo, ampliar sobre este camino sin duda es necesario. Por su parte, suponer que la economía es cerrada elimina los posibles efectos que pueda tener el comercio internacional sobre el crecimiento. Finalmente, modelar las variables de manera determinista limita los efectos de las mismas, en específico sobre la volatilidad inherente a la tasa de interés y a los precios. En consecuencia, futuros desarrollos teóricos deberán extender el análisis a una economía abierta y cambiante, incorporar otras variables financieras relevantes y establecer actividades económicas gubernamentales más amplias.

Apéndice

Bajo las condiciones de la estructura analítica en términos reales, el problema de optimización dado por (18) y (19) arroja el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden a satisfacer siguientes:

$$\mathcal{H} = \alpha \ln c + (1-\alpha)\ln l + \lambda[(A g_a k + \eta g_h k)(1-\tau) - (1-l) - c] \qquad (\mathrm{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k}, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda\delta. \qquad (\mathrm{A.2})$$

De lo anterior resultan las condiciones de optimalidad determinadas por las ecuaciones (20)-(24), al sustituir (20), (21) y (23) en (22) obtenemos las trayectorias óptimas siguientes:

$$\hat{c}_t = (\alpha\delta k_0 - 1)e^{[(Ag_a+\eta g_h)(1-\tau)-\delta]t}, \tag{A.3}$$

$$\hat{l}_t = [(\alpha - 1)\delta k_0 - 1]e^{[(Ag_a+\eta g_h)(1-\tau)-\delta]t}, \tag{A.4}$$

$$\hat{k}_t = (k_0 - 1)e^{[(Ag_a+\eta g_h)(1-\tau)-\delta]t}, \tag{A.5}$$

$$\hat{y}_t = [(Ag_a + \eta g_h)(k_0 - 1)(1-\tau)]e^{[(Ag_a+\eta g_h)(1-\tau)-\delta]t}, \tag{A.6}$$

Al evaluar los óptimos en $t = 0$ obtenemos las condiciones caracterizadas por las ecuaciones (25)-(29). Por su parte, bajo las condiciones de la estructura analítica en términos nominales se tiene que el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden correspondientes, que representan el problema de optimización dado por (19) y (34), son:

$$\mathcal{H} = \alpha \ln c + (1-\alpha)\ln l + \lambda(rk - w\eta - pc), \quad \eta = T - l,\ \ T = 1 \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = \dot{k}, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = \dot{\lambda} - \lambda\delta. \tag{A.8}$$

De lo anterior resultan las condiciones de optimalidad determinadas por las ecuaciones (35)-(39). Análogamente, al sustituir (35), (36) y (38) en (37) obtenemos las siguientes trayectorias óptimas:

$$\bar{c}_t = \left[\frac{\alpha(\rho k_0 - w)}{p}\right]e^{(r-\delta)t}, \tag{A.9}$$

$$\bar{l}_t = \left[\frac{(\alpha - 1)(\rho k_0 - w)}{w}\right]e^{(r-\delta)t}, \tag{A.10}$$

$$\bar{k}_t = k_0 e^{(r-\delta)t}, \tag{A.11}$$

$$\bar{y}_t = [(Ag_a + \eta g_h)(1-\tau)k_0]e^{(r-\delta)t}, \tag{A.12}$$

Al evaluar los óptimos en $t = 0$ y al sustituir (32) y (33), obtenemos las condiciones caracterizadas por las ecuaciones (39)-(44).

Referencias

Barro, R., (1990), “Government Expending in a Simple Model of Endogenous Growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, pp. S103-S125.

Barro, R. y X. Sala-i-Martin, (1992). “Public Finance in Models of Economic Growth”, *Review of Economic Studies*, Vol. 59, pp. 654-661.

Caminati, M. (2001). “R&D Models of Economic Growth and the Long-Term Evolution of Productivity and Innovations”, Conference: Old and New Growth Theories: An Assessment, University of Pisa, October 2001, pp. 1-28.

Cazzavillan, G. (1996). “Public Spending, Endogenous Growth and Endogenous Fluctuations”, *Journal of Economic Theory*, 71, pp. 394-415.

Easterly, W., R. King, R. Levine, S. Rebelo (1994). “Policy, Technology Adoption and Growth, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference”, Varenna Italy, pp. 75-89.

Futagami, Koichi, Morita, Yuichi, y Akihisa Shibata, (1993), “Dynamic Analysis of a Endogenous Growth Model with Public Capital”, *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No.4, pp. 607-625.

Glomm, G. y B. Ravikumar (1994). “Public Investment in Infrastructure in a Simple Growth Model”, *Journal of Economics Dynamics and Control*, 18, pp. 1173-1187.

Harrod, R. (1939). “An Essay in Dynamic Theory”, *The Economic Journal*, Vol. 49, No. 193, pp. 14-33.

Lucas, R. (1988). “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-42.

Rebelo, Sergio, “Long Run Policy Analysis and Long Run Growth”, en *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, junio de 1991, pp. 500 – 521.

Rivas-Aceves, S. y F. Venegas-Martínez. (2008a). “Participación del Gobierno en el Desarrollo Tecnológico en un Modelo de Crecimiento Endógeno de una Economía Monetaria”, *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 39, No. 152, pp. 47-68.

Romer, P. (1986). “Increasing Returns and Long-Run Growth”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 94, No. 5, pp. 1002-1037.

Romer, P. (1990). “Endogenous Technological Change”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, pp. S71-S102.

Solow, R. (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39, No. 3, pp. 312-320.

Turnovsky, S. (1993). "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy", *International Economic Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.

Turnovsky, S. (1996). "Optimal Tax, Debt, and Expenditure Policies in a Growing Economy", *Journal of Public Economics*, 60, pp. 21-44.

Uzawa, H. (1965). "Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Endogenous Growth", *International Economic Review*, Vol. 6, No.1, pp. 18-31.

Venegas-Martínez F. y S. Rivas-Aceves. (2008b). "Impulso Tecnológico Gubernamental en la Agroindustria, un Modelo de Crecimiento Endógeno", *Portes, Revista Mexicana de estudios sobre la Cuenca del Pacífico,* Universidad de Colima, Vol. 2, No. 3, enero-junio, pp. 203-234.