REPORTE DE INVESTIGACIÓN

DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Notas teoréticas sobre el sentido del equilibrio

Oscar Rogelio Caloca Osorio

Cristian Eduardo Leriche Guzmán

Víctor Manuel Sosa Godínez

Proyecto de investigación registrado ante Consejo Divisional: **# 606: Métodos y enfoques de la economía. Algunos estudios teóricos**

Línea de generación y/o aplicación de conocimiento: **Teoría económica**

Presentación

El presente reporte de investigación forma parte del proyecto "Métodos y enfoques de la economía. Algunos estudios teóricos" (#606 del Catálogo de proyectos registrados en la DCSH). Cabe señalar que este proyecto tiene como propósito obtener diversos resultados finales de los estudios teóricos que realizan en ese contexto. Dentro de este proceso, se obtienen algunos resultados de carácter exploratorio que los autores los consideran inacabados. El presente reporte de investigación presenta resultados de investigación que tienen, según los autores, un 75% de avance. El objetivo, método y desarrollo del reporte están explícitos en la introducción correspondiente.

Dr. Sergio Cámara Izquierdo, Encargado del Departamento de Economía

NOTAS TEORÉTICAS SOBRE EL SENTIDO DEL EQUILIBRIO

Oscar Rogelio Caloca Osorio[1]

Cristian Eduardo Leriche Guzmán[2]

Víctor Manuel Sosa Godínez[2]

Resumen

El presente reporte de investigación corresponde con un panorama breve y general sobre las consideraciones y determinación de situaciones de equilibrio. Esto comprende apuntar a un estudio del equilibrio a través de las condiciones paradigmáticas de los sistemas dinámicos complejos y en particular de la Teoría del Caos. Apuntando a tres tipos de atractores y a las condiciones de estabilidad, asintóticamente estable e inestable.

Palabras clave: Equilibrios estable e inestable. Sistemas dinámicos complejos. Teoría del caos.

JEL: C02, C61, D5.

I. Introducción.

Toda noción de equilibrio puede implicar desde la constancia de las acciones individuales hasta la penetrante idea de la acción colectiva. En este caso nos abocaremos principalmente al registro de las acciones conductuales de los individuos abstractos en interacción, es decir, bajo un esquema de acción colectiva; base fundamental de la acción social.

En este sentido consideramos que la acción colectiva es la base para el estudio de las interacciones entre individuos y su programática empírica registrada a través de las personas. Es decir, a los individuos los trataremos como referentes abstractos teoréticos, y a las personas como entidades vivas en el mundo sensible: nosotros.

Cabe destacar que la diferencia esencial entre acciones de los individuos y acciones de las personas, en este reporte de investigación, deriva del hecho que los individuos son entidades objetivo-meta-racionales, puesto que obedecen

[1] Profesor-Investigador del Departamento de Sociología de la UAM-Azcapotzalco. E-mail: oscarcalo8@yahoo.com.mx

[2] Profesores-Investigadores del Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco. E-mail: cristianleriche1@yahoo.com.mx y sosgovic2003@yahoo.com.mx.

principalmente a la Teoría de la Elección Racional [TER]. Y las personas cuentan con un esquema de racionalidad débil o razonabilidad, que implica un grado de racionalidad en correspondencia con sus valoraciones axiológicas, el considerar que cuentan con emociones, empatía y comprenden el entorno individuo-socio-cultural. Entendiendo por comprender una forma simple del entendimiento de observar y obtener conclusiones no falsas de qué es lo que sucede en su entorno individual y con el resto de las personas.

Una de las razone por las que él equilibrio es fundamental en la determinación de las acciones colectivas, tiene que ver con la plausible existencia de orden o hasta de una transformación de una situación caótica, en el sentido de los griegos, hasta una condición de orden.

El orden que va desde las consideraciones macro como el orden del universo, hasta las consideraciones micro el orden en las acciones individuales. El orden implica en sí mismo la existencia de equilibrio y el equilibrio implica orden. Y ese orden implica algo más: la probabilidad subjetiva de la existencia de control: control sobre las consecuencias de nuestras acciones. Es decir, control en la posibilidad de predecir hacia el futuro nuestras acciones pasadas y presentes.

Pero lo más importante del control es la posibilidad de dos cuestiones predecir qué pasará en el futuro, como ya lo mencionamos, pero sobre todo control sobre lo que consideramos que él o la otra piensa. Hemos llegado a tal situación exagerada, que consideramos que es posible que él o la otra nos externe por medio de un lenguaje simbólico y socialmente estructurado, lo que piensa.

Esto por supuesto en un mundo en donde aflora la incertidumbre pensamos que nos brinda un poco de certeza a nuestras vidas. LA certeza es la esperanza de que nuestras vidas y las de los demás transitarán en un promedio social. Lo cual es sumamente absurdo porque lleva a rechazar a todos los que no cumplan con ese estándar de vida “promedio” o “normal”.

El que lo anterior no sea del todo cierto lo prueban la contrafinalidad y las consecuencias no esperadas de la acción. En la primera esperamos A y obtenemos no A. Y en la segunda ni siquiera habíamos pensado en tales consecuencias de nuestras acciones.

Por ende, un equilibrio es colectiva y socialmente deseable, pues sustituye la idea de miedo en Hobbes. Así, el presente reporte tiene el objetivo de mostrar algunas situaciones de equilibrio emanadas de los sistemas dinámicos complejos y en particular de la Teoría del Caos. Para ello, se plantean las siguientes tres secciones: en la primera se aborda la cuestión de los tipos de atractores que singularmente nos llevan a situaciones de estabilidad e inestabilidad.

En la segunda sección, se plantea la determinación formal sobre los sistemas estables, asintóticamente estables e inestables. Para finalmente en la tercera sección abordar la cuestión de las condiciones de un equilibrio aplicado a los sistemas deterministas de las ciencias sociales.

II. Atractores.

La formación de un atractor corresponde con el hecho de que los objetos identificados se agrupen en un espacio determinado con una presente dispersión. Así, dado V un subconjunto de R^n y F: $V \rightarrow R^n$, donde n=1, 2 ó 3. También dado A un subconjunto de V. Entonces A es un atractor de F sujeto a las siguientes condiciones:

1) A es un cerrado e invariante[3] subconjunto de V

2) Existe una vecindad U de A tal que cada vez que v está en U entonces $F^{(k)}(v) \rightarrow A$ (en el sentido de que para cada $\epsilon > 0$, hay un entero positivo N tal que si $k \geq N$, allí existe un w_k en A tal que $\| F^{(k)}(v) - w_k \| < \epsilon$).Los atractores, como su nombre lo indica, son una representación de las condiciones tendenciales y de variación, sin salir de un rango de evolución y que se gesta como resultado del patrón que tienen los parámetros de determinadas ecuaciones que les permiten su existencia.

Estos pueden ser atractores no caóticos y atractores caóticos, estos últimos también son conocidos como atractores extraños. Dentro de los atractores no caóticos se encuentran aquellos cuya tendencia coincide con un punto fijo o una zona fija de atracción sin variación en su esquema tendencial o de evolución estadística. La cual, se determina con un alto grado de probabilidad, en grado tal que experimentan trayectorias deterministas, siendo sencillo el pronóstico de estás. Esto implica que este tipo de atractores, debido a su estructura, sea predecible su

[3] La invarianza significa que las iteraciones de cualquier punto en A están también en A.

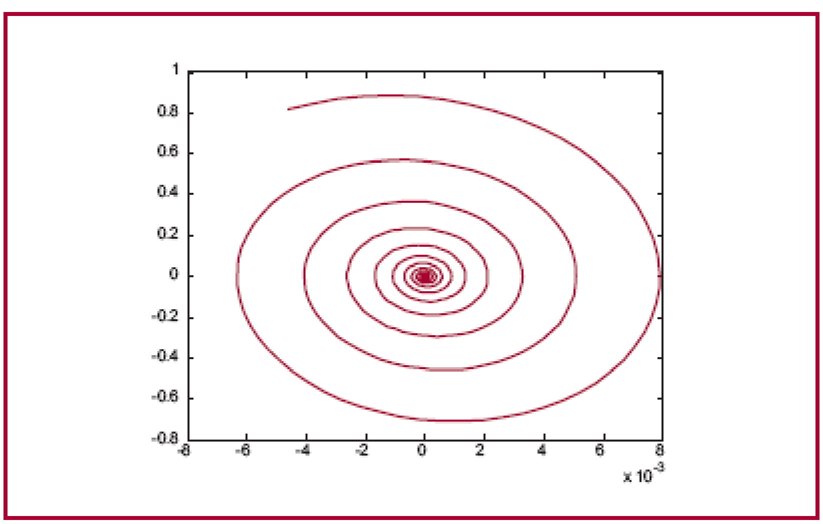
evolución con un alto grado de certeza que si bien pudiese no ser una certeza absoluta permite la identificación clara de las trayectorias de evolución, a estos también se les conoce como atractores simples.

En este sentido, los atractores simples (véanse esquema 1 y 2) son una forma particular de determinación de los comportamientos dinámicos de las estructuras espacio-temporales, que, bajo ciertas características, como los atractores de punto fijo, pudiesen corresponder con factores relacionados con las condiciones de vida y crecimiento de las ciudades e indispensables para estructuras teórico-determinista como la búsqueda de equilibrio único en ciencias sociales.

Este esquema de atractores simples puede ser aplicado a los fenómenos espaciales y no dista de que ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de los individuos o de fenómenos sociales colectivos, se registre un aumento o disminución desmesurada de individuos que eligen satisfacer una determinada necesidad o algún interés en particular.

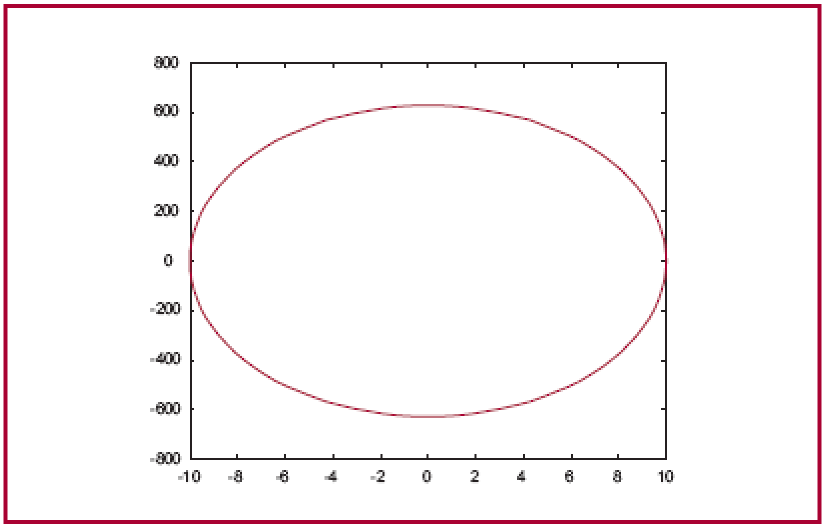
Así, queda establecido que el tipo de atractor simple puede dividirse en dos “1) *el punto atractor*, que corresponde a un estado estacionario del sistema, nada ocurre al transcurrir el tiempo; 2) el atractor *de ciclo límite*, que indica un comportamiento periódico, lo que implica, además, que, si bien el sistema es disipativo y, por lo tanto, va perdiendo su energía, ésta se va reponiendo por la entrega de energía de alguna fuente exterior.” (Sametband, 1999: 60). Estas dos clases de atractor son de estructura simple y pueden ser representados a través de curvas cerradas como se muestra en los esquemas 1 y 2.

Esquema 1: Atractor de punto fijo



Fuente: (Romanelli, 2006: figura 1)

Esquema 2: Atractor de ciclo límite



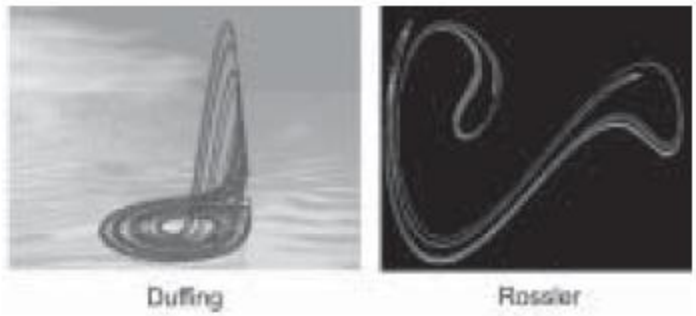
Fuente: (Romanelli, 2006: figura 2)

Lo anterior es interesante cada vez que pudiesen ser establecidas ecuaciones que representen estos sistemas con un grado de complejidad relativamente bajo. Sin embargo, la mayor parte de los fenómenos sociales vinculados al territorio o las incidencias del individuo en el espacio no corresponden con estás condiciones. Pues cabe destacar que, si se pretende transitar de una situación caótica a una ordenada o con cierto tipo de orden, el camino es el establecimiento de una transformación de la situación original a una posterior contemplando la existencia de entropía, es decir, la transformación de un sistema a otro no es unívoca.

Una gran parte de los fenómenos sociales operan bajo patrones de mayor grado de complejidad, lo cual, implica que su dinámica requiere de sistemas que tiene que ver más con los atractores de tipo extraño (véanse esquemas 3 y 4)

Los atractores extraños o meramente caóticos, corresponden con los sistemas que tienden a ser altamente irregulares, cabe destacar que el nombre de “atractor extraño le fue dado por D. Ruelle y F. Tankes” (Cambel, 1999: 70), dentro de los atractores extraños o atractores caóticos representativos de este tipo de soluciones matemáticas se tiene el clásico atractor de Lorenz (véase esquema 4).

Esquema 3: Atractor extraño de los tipos Duffing y Rössler



Fuente: (Romanelli, 2006: figura 4)

Esquema 4: Atractor extraño del tipo Lorenz

Fuente: (Romanelli, 2006: figura 6)

Estos atractores por las condiciones de su estructura presentan una opción de mayor viabilidad para la identificación de evolución de los fenómenos sociales espaciales, pues contemplan la no existencia de un periodo preciso de transcurso de las trayectorias. Con ello en mente, se presenta el nacimiento del caos a través de sus requerimientos para un sistema inestable.

III. Caos.

La idea sobre la existencia del caos data desde hace varios miles de años a.C. y bien puede situársele como significativo para la formación del universo en la época de los griegos, quienes sostenían que el caos correspondía con la ausencia de todo orden. En la teoría matemática del caos esto no opera del todo de esta manera, puesto que se considera un tipo de caos en donde si es posible la identificación de comportamientos regulares, aunque no igualmente repetitivos de la información analizada. En muchos de los casos este caos se le conoce como determinista y hasta determinista asintótico, que no es del todo indeterminista ni del todo determinista, es decir, es posible establecer condiciones de mensurabilidad en los sistemas caóticos y nos guían en nuestro esquema de certeza asintótica o de más o menos verdadero. Para ello es necesario observar las circunstancias de la estabilidad o inestabilidad de estos sistemas.

III.1 Estabilidad, inestabilidad y el exponente de Lyapunov.

III.1.1 El teorema de estabilidad de Lyapunov.

Con la teoría de la estabilidad se busca identificar sistemas que en principio son estables pero que con el paso del tiempo se vuelven inestables o caóticos o sistemas que desde un inicio dan muestras de un comportamiento caótico. Esto permite el estudio e identificación de sistemas estables e inestables, así mismo, abre las puertas a la enunciación posterior del control de sistemas caóticos. En sistemas dinámicos existen distintos tipos de problemas de estabilidad. Sin embargo, sólo atenderemos a los dilemas de estabilidad de los puntos de equilibrio.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov[4]. Donde, un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Así, un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. Cabe destacar que los teoremas de estabilidad de Lyapunov ofrecen condiciones suficientes para la estabilidad de puntos de equilibrio (PE).

III.1.2 Teorema de estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema estacionario

$x' = f(x)$………… (1)

[4] Aleksandr Lyapunov (1857-1918), matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre.

Donde f: D→ R^n es un mapa local desde un dominio D ⊂ R^n en R^n.

Supongamos que x´´∈ D es un PE de (1), es decir f (x´´) = 0. Vamos a caracterizar y estudiar la estabilidad de x´´. Por conveniencia, vamos a asumir que x´´ = 0 (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos y = x-x´´ y trabajamos con la ecuación y´ = g(y), donde g(y) ≜ f (y + x´´), que tiene un equilibrio en el origen).

Definición 1. El PE x = 0 de (1) es estable, si para cada ϵ > 0 existe δ = δ (ϵ) tal que

‖x (0)‖ <δ →‖x(t)‖ < ϵ, para todo t≥ 0

a) inestable si no es estable.

b) asintóticamente estable (AE) si es estable y δ puede elegirse tal que:

‖x(0)‖ <δ → $\lim_{t\to\infty}$ x(t) =0

Esta definición tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo t≥ 0. Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, puesto que se requieren condiciones adicionales en el teorema de Lyapunov que van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Ahora, es posible determinar la estabilidad en el PE a través de funciones, para ello, se considera que V: D → R una función continuamente diferenciable en un dominio D ⊂ R^n que contiene el origen. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (1) está dada por:

$$V^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x)\end{bmatrix}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)\text{............(2)}$$

Donde, la enunciación de V, permite establecer el primer teorema:

Teorema 1 (Lyapunov). Sea el origen x = 0 un PE de (1) y sea D ⊂R^n un dominio que contiene el origen. Sea V: D →R una función continuamente diferenciable tal que

$V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$ ……………… (3)

$\mathring{V}(x) \leq 0$ en D………………………………… (4)

Entonces x=0 es estable. Más aun, si

$\mathring{V}(x) < 0$ en $D - \{0\}$……………………………… (5)

Entonces x=0 es AE

Demostración.

Dado $\epsilon > 0$, elijamos $r \in (0, \epsilon]$ tal que

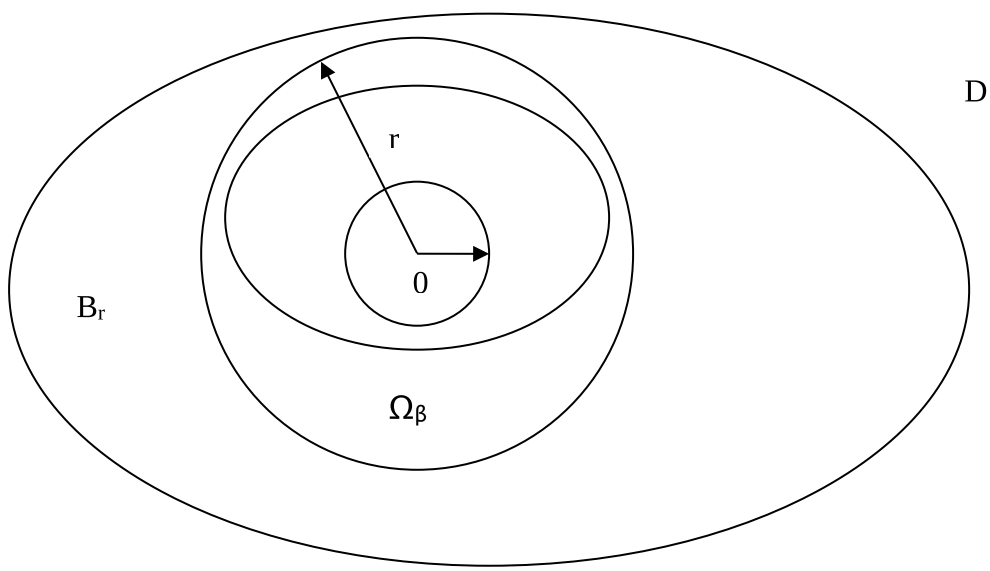
$B_r = \{x \in R^n : ||x|| \leq r\} \subset D$

Sea $\alpha = \text{mín}_{||x||=r} V(x)$. Entonces $\alpha > 0$ por (2). Tomemos $\beta \in (0, \alpha)$ y sea

$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$

Entonces Ω_β está en el interior de B_r (véase el esquema 5). El conjunto Ω_β tiene la propiedad

Esquema 5: representación de los conjuntos de la demostración.



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000citado en Caloca, 2010).

De que toda trayectoria que comienza en Ω_β en t=0 permanece en Ω_β para todo t ≥ 0. Esto sigue de (4) ya que

$\mathring{V}(x(t)) \leq 0 \rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$, para todo $t \geq 0$

Como Ω_β es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en B_r), se concluye que el (1) tiene una solución única definida para todo $t \geq 0$ cuando x (0) $\in \Omega_\beta$. Como V es continua y V (0) =0, existe $\delta > 0$ tal que

$||x|| \leq \delta \rightarrow V(x) < \beta$

Entonces

$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$

Y

$x(0) \in B_\delta \rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \rightarrow x(t) \in B_r$, para todo $t \geq 0$

Por lo tanto

$||x(0)|| < \delta \rightarrow ||x(t)|| < r \leq \epsilon$, para todo $t \geq 0$

Lo que muestra que el PE en x=0 es estable.

Supongamos ahora que (5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como V es continua y V (0) =0, es suficiente mostrar que $V(x(t)) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como V (x(t)) es monotónicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

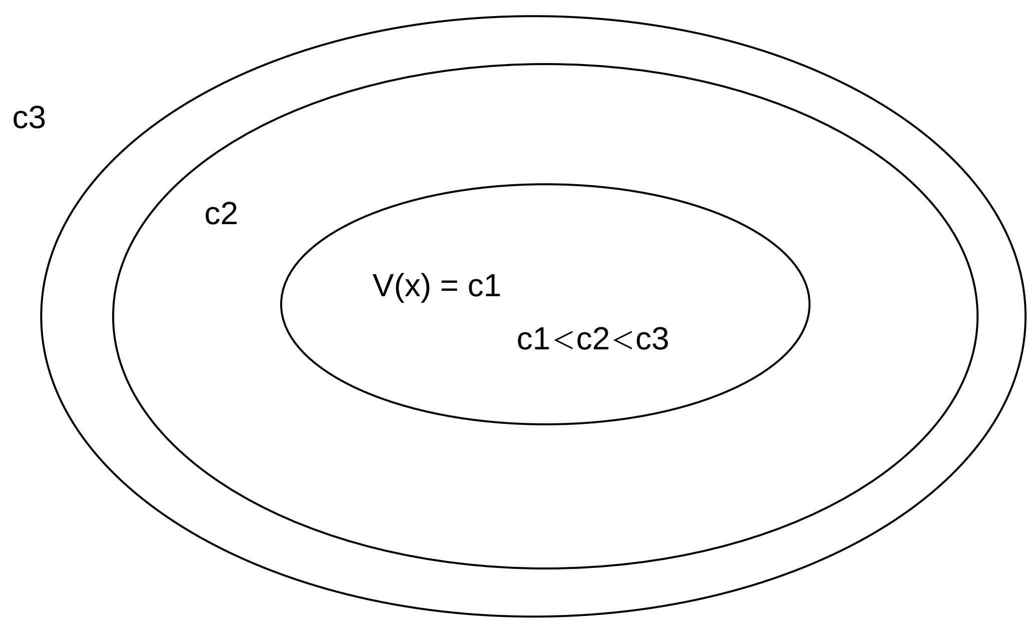
Mostramos que c=0 por contradicción. Supongamos que $c > 0$. Por continuidad de V(x), existe $d > 0$ tal que $B_d \subset \Omega_c$. El límite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implica que la trayectoria x(t) permanece fuera de la bola B_d para todo $t \geq 0$. Sea $-\Upsilon = \text{máx}_{d \leq ||x|| \leq r} \mathring{V}(x)$, el cual existe porque la función continua $\mathring{V}(x)$ alcanza un máximo sobre el conjunto compacto $\{d \leq ||x|| \leq r\}$. Sabemos que $-\gamma < 0$ por (5). Integrando $\mathring{V}(x)$ tenemos que

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \mathring{V}(x(\tau))\, d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que $c > 0$. qed

En este sentido, una función continuamente diferenciable que satisface (3) y (4) se denomina función de Lyapunov. La superficie $V(x)= c$ se denomina superficie de Lyapunov o superficie de nivel. Usando superficies de Lyapunov, (véase el esquema 6: que da una interpretación intuitiva del teorema 1). La condición $\mathring{V} \leq 0$ implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov $V(x)= c$ se introduce en el conjunto $\Omega c = \{x \in Rn | V(x) \leq c\}$ y nunca puede salir de él. Cuando $\mathring{V} < 0$, la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un c menor. A medida que c decrece, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Si sólo sabemos que $\mathring{V} \leq 0$, no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir:

Esquema 6: curvas de nivel de una función de Lyapunov



Fuente: Elaboración propia con base en (Seron, 2000)

Que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola B_ϵ sólo con requerir que el estado inicial x (0) pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función V(x) que satisface (3) se dice definida positiva. Si satisface la condición más débil $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$, se dice semidefinida positiva. Una función se dice definida negativa o semidefinida negativa si –V(x) es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si V(x) no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice indefinida. El teorema de Lyapunov se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que $\mathring{V}(x)$ es semidefinida negativa, y es AE si $\mathring{V}(x)$ es definida negativa.

III.1.3 Cuestiones sobre la región de atracción: Estabilidad asintótica global (EAG).

Sea ϕ (t; x) la solución de (1) que comienza en t=0 y supongamos que el origen x=0 es un PE y AE. Definimos como región (dominio) de atracción (RA) del PE al conjunto de todos los puntos x tal que $\lim_{t\to\infty} \phi(t; x) = 0$. Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la RA. Sin embargo, se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla en conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del teorema 1 sabemos que existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio D, y si $\Omega_c=\{x\in R^n | V(x)\leq c\}$ está acotado y contenido en D, entonces toda trayectoria que comienza en Ω_c permanece en Ω_c y tiende al origen cuando $t\to\infty$. Por lo tanto, Ω_c es una estima de la RA. Esta estima puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo que condiciones la RA es todo el espacio R^n. Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial x, la trayectoria ϕ (t; x) tiende al origen cuando $t\to\infty$, sin importar cuan grande es $||x||$. Si un PE AE tiene esta propiedad se dice que es globalmente AE (EAG). Recordando otra vez la prueba del teorema 1 vemos que se puede probar EAG si se puede asegurar que cada punto $x \in R^n$ puede incluirse en el interior de un conjunto acotado Ω_c. Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de c el conjunto Ω_c puede no ser acotado.

Para ello, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Barbashin-Krasovskii).

Sea x=0 un PE de (1). Sea $V: R^n \to R$ una función continuamente diferenciable tal que

$V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$……………6

$||x|| \to \infty \to V(x) \to \infty$…………………………7

$\mathring{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$………………………8

Entonces x=0 es GAE

Demostración.

Dado cualquier punto $p \in R^n$, sea $c= V(p)$. La condición 7 implica que para cualquier $c > 0$, existe $r > 0$ tal que $V(x) > c$ cuando $||x|| > r$. Por lo tanto, $\Omega_c \subset B_r$, lo que implica que Ω_c es acotado. El resto de la prueba es similar al teorema 1. qed.

III. 1. 5 Inestabilidad.

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable. Sea $V : D \to R$ una función continuamente diferenciable en un dominio $D \subset R^n$ que contiene al origen x=0. Supongamos que $V(0) = 0$ y que hay un punto x_0 arbitrariamente cercano al origen tal que $V(x_0) > 0$. Elijamos $r > 0$ tal que la bola $B_r = \{x \in R^n | \ ||x|| \leq r\}$ esté contenida en D, y sea

$U= \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$ ………………………………9

El conjunto U es no vacío. Su frontera está dada por la superficie V(x)=0 y la esfera $||x|| = r$. Como $V(0) = 0$, el origen está sobre la frontera de U en el interior de B_r.

Teorema 3: (Chetaev).

Sea $x=0$ un PE de (1). Sea $V: D \to R$ una función continuamente diferenciable tal que $V(0)=0$ y $V(x_0) > 0$ para algún x_0 con $||x_0||$ arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto U como en (9) y supongamos que $\mathring{V}(x) > 0$ en U. Entonces $x=0$ es inestable

Demostración.

El punto x_0 está en el interior de U y $V(x_0) = a > 0$. La trayectoria $x(t)$ que comienza en $x(0) = x_0$ debe dejar el conjunto U. Para probar esto, notemos que mientras $x(t)$ permanezca en U, $V(x(t)) \geq a$ porque $\mathring{V}(x) > 0$ en U. Sea

$$\gamma = \text{mín}\,\{\mathring{V}(x) \mid x \in U \text{ y } V(x) \geq a\}$$

que existe porque la función continua $\mathring{V}(x)$ tiene un mínimo en el conjunto compacto $\{x \in U \text{ y } V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \mid V(x) \geq a\}$. Entonces $\gamma > 0$ y

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \mathring{V}(x(s))\, ds \geq a + \gamma t$$

Esta desigualdad muestra que $x(t)$ no se puede quedar indefinidamente en U porque $V(x)$ está acotada en U. Ahora, $x(t)$ no puede dejar U a través de la superficie $V(x)=0$ porque $V(x(t)) \geq a$. Por lo tanto, debe dejar U a través de la esfera $||x|| = r$. Como esto pasa para $||x_0||$ arbitrariamente pequeña, el origen es inestable. qed

Por otra parte, es posible observar que las condiciones espaciales caóticas permiten configurar la existencia de atractores simples y/o extraños a lo largo del territorio, esto ocurre cada vez que exista una segregación socio espacial. Lo cual, puede ser constatado a través de la evaluación de la caosticidad del sistema en estudio.

Así, la evaluación del tipo de atractor para las condiciones de vida de la población que son estudiadas en un sistema social que tiene que ver con el territorio, puede establecerse a través de la determinación de si este es un sistema estable o inestable, es decir, si es no caótico o caótico respectivamente.

La indagación de esto corresponde con la evaluación de la función que determina tal sistema por medio del llamado exponente de Lyapunov. El cual opera bajo un esquema bivalente, de tal suerte que si el exponente resulta ser positivo; la situación que experimenta el sistema es caótica y, por el contrario, si este es negativo; el sistema esta representado por un atractor simple: de ciclo límite o de punto fijo. La estimación del exponente de Lyapunov corresponde con:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log\left|f'(x_i)\right|$$

Donde las múltiples iteraciones del sistema determinan si este tiene un comportamiento simple o extraño. Aquí tan sólo lo señalamos en otro trabajo se expondrá las implicaciones para un sistema territorial de corte socio-político-económico.

IV. Condiciones y equilibrio en Ciencia Social.

LA existencia de equilibrio en Ciencia Social se corresponde con si este es caótico o no en cuyo caso puede ser estable o asintóticamente estable de punto fijo o de ciclo límite. En este mismo sentido bien podría ser caótico o inestable, donde se pueden establecer tendencias, pero no pronósticos con toda la certeza y precisión que el caso amerite.

Así mismo, en esencia el equilibrio tradicional en un sistema determinista tradicional se inclina por uno estable de punto fijo. En esencia este debe cumplir con tres requisitos: existencia, unicidad y estabilidad. La Existencia, por si misma responde a la cuestión de que hablemos de algo que en realidad pueda encontrarse en el entorno de nuestras múltiples soluciones, se requiere que exista un equilibrio si es que queremos hablar de estabilidad de punto fijo en términos caóticos.

Es decir, argumentamos de algo que en realidad es plausible de poder ser encontrado. Esto conduce a dos tipos de sistemas: los deterministas y los indeterministas, los indeterministas pueden o no tener equilibrio, si es que alguna vez partieron o no de él o tienden o no a él. Empero, los deterministas sobre los que estamos hablando en algún momento en el tiempo les será autoconstruido un equilibrio.

Esto porque, los sistemas deterministas que se conducen de forma teleológica, implican, concurrencia objetivos con metas o de objetivos con una meta en particular constituyéndoles la existencia, por lo menos, de un equilibrio. Lo cual nos lleva a la siguiente cuestión y es que el equilibrio no sólo se requiere que exista sino también que sea único.

Lo cual implica que no volteemos la mirada a múltiples alternativas de solución de nuestro entorno, sino sólo a una y que esta sea la que maximiza. El que tengamos una solución o que el equilibrio sea único lleva, en un sistema determinista a que esta sea la única solución factible de maximizar nuestros objetivos. Lo que conduce a que nos genere la tercera condición: la estabilidad.

La estabilidad conduce a qué el equilibrio que existe y es único permanezca en el tiempo de esa manera, y si ocurre un movimiento del mismo sea probable objetivamente regresar a él. Así, estas tres condiciones proveen de los elementos necesarios para que un sistema determinista encuentre una correspondencia 1:1 entre sus objetivos y la meta buscada. Y que ello pueda servir de mucho no sólo para la certeza de dicha relación, sino que permita conectar favorablemente el presente ya sea con una retrodicción o con una predicción del sistema.

Claro es que el establecimiento de una probabilidad objetiva en busca de hablar de un sistema en el pasado o en el futuro implica establecer una condición de decibilidad. Es decir, que sea posible establecer un valor veritativo a las proposiciones emanadas de dicho sistema. Lo cual no es otra cosa que argumentar sobre la falsedad o verdad de las condicionantes predictivas del sistema. Es decir, la predicción o la retrodicción es falsa o verdadera.

Lo anterior abre la plausibilidad de encontrar soluciones únicas y estables a problemáticas de decisión social o de interacción decisional. Sin embargo, el mundo social se comporta más como un sistema caótico que como un no caótico, y, por ende, las soluciones quedan abiertas al indeterminismo y no al determinismo social.

Ello implica que, si bien es probable establecer una noción de falsedad del estado pasado o futuro del sistema, no es probable objetivamente hablar de un sistema verdadero. Ello principalmente porque, el sistema verdadero implica que tanto lo que se retrodiga o se prediga del futuro será cierto. El pasado lo podemos corroborar sin gran dificultad alguna [excepto por aquella falta de información específica]. Pero el futuro es una cuestión diferente.

Decir, que el futuro será de tal o cual manera no puede argumentarse como verdadero en el presente pues no existen elementos necesarios para corroborarlo ya que no se ha alcanzado el futuro. Por ende, se transforma en dos cosas en el corto y mediano plazo es una esperanza, pero en el largo plazo es una profecía.

Sin recurrir al hecho de que el futuro puede ser auto-realizable, es decir, sugerir a las personas que hacer para que se llegue a tal situación en el corto plazo y por lo tanto auto-cumplir lo predicho en el presente. El futuro es una apuesta de probabilidad subjetiva pues esta indeterminado. Es por ello que se emplean modelos deterministas para predecir, lo cual es tan sólo una preferencia y no una razón positiva para argumentar que lo predicho tal cual así sucederá.

En este caso, hablar sobre la existencia, unicidad y estabilidad del equilibrio es una situación determinista y corresponde con toda situación de auto-control de lo argumentado. El auto-control media para una merma de la incertidumbre principal cuestión componente sobre el tratar de conocer el futuro. El futuro por ser indeterminado y operar bajo incertidumbre sólo puede ser establecido como no falso, pero no verdadero.

No falso en el sentido de que, dado nuestros aparatos de medición, el estado de nuestro conocimiento y de nuestro entorno individuo-socio-cultural, sólo es probable subjetivamente sugerir que pudiese pasar dadas las condiciones presentes y pasadas sobre el conjunto de nuestras acciones.

Ello ocurre porque media la incertidumbre que si bien tiene un componente de certeza o nula incertidumbre no es el mecanismo último de la incertidumbre cómo lo es no conocer una parte del entorno de las consecuencias de la acción. Pues, en los eventos que se enfrentan las personas existen tres tipos de incertidumbre: en la primera, las peronas no tiene incertidumbre alguna lo cual los lleva a contar con una certeza total sobre el evento en cuestión de acción.

La segunda, corresponde con la incertidumbre que se debe a deficiencias en la información, en el sentido de que no es posible determinar con exactitud la verdad de una proposición, sin embargo, se considera que en el largo plazo tal verdad puede llegar a ser especificada con precisión; en este caso no existe certeza, pero en el largo plazo si existirá.

Por ende, las personas se enfrentan a un dilema de falta de información en el conjunto de información, esto implica que no existe una falta total de certeza y si que gran parte de la información disponible puede ser de conocimiento común para una colectividad en particular. La tercera opción de incertidumbre implica que no es posible determinar completamente el valor de verdad de una proposición ni tampoco puede obtenerse una específica precisión en el largo plazo de la verdad de tal proposición, es decir, se plantea la existencia de una total incertidumbre. Y, por ende, la falta de una certeza total, en este sentido la gradación va de la existencia total de certeza hasta la falta total de certeza. Y ese es el mundo de las personas.

De esta manera la incertidumbre juega con nuestro entorno predictivo del futuro y, por ende, con la cuestión de si explicamos el futuro o por coincidencia dimos con la explicación sobre el futuro. Futuro alcanzable vs inalcanzable, dependiendo de si contamos con el equilibrio de un sistema estable determinista.

V. Conclusiones.

Las reflexiones finales corresponden con lo siguiente: en primer lugar, consideramos de suma importancia la determinación de los atractores como formas de encontrar el equilibrio para un sistema. El atractor simple de punto fijo es el más socorrido en ciencias sociales pues este también es estable. Así, en estas ciencias se prefiere, porque refleja un sistema en el cual puede trabajarse en el presente y predecir con suma facilidad hacia el pasado [retrodicho] o hacia el futuro [predicho]. El que pueda ser certero y preciso con dichas predicciones es una cuestión sumamente debatible: lo cual se inclina entre no falsa predicción o retrodicción y concurrencia por coincidencia.

El otro tipo de atractores tienen que ver con el ciclo límite, es decir, se contempla una estructura que circunda un espacio sin pasar hacia el interior ni proyectarse hacia el exterior, este también es estable. Empero, existen otro tipo de atractores que son atractores caóticos y que corresponden a cuestiones de inestabilidad. Claro es que en este caso se esta hablando de un caos determinista.

Es decir, se tiene una estructura que no puede predecirse con precisión como en un punto fijo, pero si puede saberse de su trayectoria tendencial. Este tipo de atractor corresponde con gran parte de los sistemas de ciencias sociales. Empero, no son tan comúnmente empleados porque en los sistemas estables de punto fijo se puede predecir con cierto grado de formalidad, aunque casi siempre no se correspondan los resultados del modelo con los de la realidad.

Parte importante del transitar del equilibrio tiene que ver con la correspondencia con una categoría más: lo asintóticamente estable. Es decir, los puntos de equilibrio son estables si son tanto estables como asintóticamente estables. Esta segunda categoría nos indica que un sistema no llega a su punto más que asintóticamente, es decir, en el infinito.

Para ello, la mayor parte de los estudios en ciencias sociales buscan llegar a obtener un sistema estable y un atractor de punto fijo que no sea asintóticamente estable, sino que quede determinado en un corto o mediano plazo. Para ello, en un sistema determinista con un atractor de punto fijo, lo importante es que exista el equilibrio, que sea único y que sea estable.

La existencia es garante de que tengo una o una serie de soluciones posibles a las problemáticas que se presenten en mi sistema. Lo cual esta ligado a que exista una sola solución que maximiza mis objetivos para llegar a una meta determinada y, por último, pero no menos importante, es que ese equilibrio sea estable de tal suerte que en el paso del tiempo si salgo de él pueda regresar sin grandes dificultades al equilibrio.

VI. Bibliografía

Arrowsmith, D. y Place, C. (1992), *Dynamical Systems: differential equations, maps and chaotic behaviour*, Reino Unido, Chapman and Hall.

Balchin ; P., Isaac, D. y Chen, J. (2000), *Urban Economics*, Great Britain, Palgrave.

Bolívar, Augusto y Oscar Caloca (2011) Distribución espacial de la pobreza Distrito Federal de México 1990-2040, en Revista Polis número 29, Chile: Universidad Bolivariana de Chile.

Boltvinik, Julio y Hernández Laos, Enrique (1999) *Pobreza y Distribución del Ingreso en México*, México: siglo XXI editores.

Briggs, J. y Peat, D. (1999), *Las siete leyes del caos*, Barcelona, Grijalbo.

Brock, Dan (1996). “Medidas de la calidad de vida en el cuidado de la salud y la ética médica”, en Sen, Amartya, Martha Nussbaum (comps.) *La Calidad de Vida*, México: FCE. cap. 5.

Cambel, A. (1999), *Applied Chaos Theory: a paradigma for complexity*, USA, Academic Press.

CEPAL (2001). *La medición del desarrollo humano: elementos de un debate*, Santiago de Chile: Publicaciones de las Naciones Unidas.

Cambel, A. (2000). *Applied chaos theory*, USA: Academic Press.

Ekeland, I. (2001), *El caos*, México, siglo XXI editores.

Erikson, Robert (1996). “Descripciones de la Desigualdad: el Enfoque Sueco de la Investigación Sobre el Bienestar”, en Sen, Amartya, Martha Nussbaum (comps.) *La Calidad de Vida*, México: FCE.

Fujita, M., Krugman, P. y Venables, A. (2000), *Economía Espacial*, Barcelona, Ariel.

Gleick, J. (2012), *Caos : la creación de una ciencia*, Barcelona, Crítica.

Gobierno del Distrito Federal (2010) *Programa de desarrollo urbano: Milpa Alta*, México: GDF.

Gulick, Denny (2000). *Encounters with chaos*, Reino Unido: IoP.

Hacking, I. (1990), *La domesticación del azar. La erosión del determinismo y el nacimiento de las ciencias del caos*, Sevilla, Gedisa.

INEGI (2005-2010). *Banco Electrónico de Información Estadística*, México: INEGI.

Kapitaniak, T. (2000), *Chaos for engineers*, Berlín, Springer Verlag.

Lewis, Oscar (1972). *Antropología de la pobreza*, México: FCE.

Mendelson, B. (1990), *Introduction to topology*, New York, Dover.

Miller, D. (comp. 1997), *Popper escritos selectos*, México, Fondo de Cultura Económica.

Nagashima, H y Baba Y. (1999). *Introduction to chaos*, Bristol; Reino Unido: IoP.

O’ Sullivan, A. (2002), *Urban Economics*, USA, IRWIN.

Press.

Prigogine, I. (1999), *Las leyes del caos*, Barcelona, Crítica.

Puu, T. (2000), *Atractors, bifurcations and chaos*, Berlín, Springer Verlag.

Romanelli, L. (2006), “Teoría del caos en los sistemas biológicos”, *Revista Argentina de Cardiología*, Argentina, número 6 volumen 74, pp. 478-482.

Sametband, M. (1999), *Entre el orden y el caos la complejidad*, México, Fondo de Cultura Económica.

Sen, Amartya (2000). *Desarrollo y libertad*, México: Planeta.

------- (1995). *Nuevo examen de la desigualdad*, Madrid; España: Alianza.

------- (1992). “Sobre conceptos y medidas de pobreza”, en: *Comercio Exterior*, México: Banco de Comercio Exterior, vol. 42, núm. 4; abril.

Sen, Amartya, Martha Nussbaum (comps.) *La Calidad de Vida*, México: FCE.

Sibirsky, K. (1975), *Introduction to topological dynamics*, Leyden, Noordhoff.

Zill, D. (2007), *Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones de modelado*, México, Thomson.