PRESENTACIÓN

Este documento titulado *Modelos estáticos de los agentes económicos*, presentado por la Dra. Lucía A. Ruiz Galindo, es un reporte de investigación del proyecto **Fundamentos Microeconómicos**, cuyo actualización fue aprobada por el Consejo Divisional de Ciencias y Humanidades, en su sesión 246 celebrada el 30 de Enero del 2007.

En el proyecto previamente mencionado se incursiona en una relativamente nueva línea de investigación, la de los fundamentos microeconómicos o de microfundamentos, consistente en abordar el estudio de los grandes agregados económicos analizando el comportamiento individual de los diferentes agentes que constituyen la economía.

En particular, en este reporte de investigación se estudia la conducta de los consumidores en el contexto de una economía cerrada, mediante diferentes modelos intertemporales formulados en tiempo discreto. Cada modelo incorpora la conducta racional de los consumidores y necesariamente reflejan lo qué hacen y para qué lo hacen. Sus correspondientes soluciones conducen a las trayectorias y a los determinantes de las principales variables macroeconómicas.

Son tres los modelos que se presentan para el consumidor. El primero se plantea para una economía con un sólo bien, en el segundo el consumidor debe decidir cómo distribuir su ingreso entre consumo y ahorro y el tercero, se plantea en el contexto de una economía con dos bienes, en todos estos modelos se considera que el consumidor deriva su ingreso del capital y el trabajo. Por su parte, para las empresan se considera un solo sector con dos factores de producción, capital y trabajo, y se resuleven dos modelos, el de maximización de beneficios y su dual, es decir, el de minimización de costos.

Dra. Beatriz García Castro
Jefa del Departamento de Economía

MODELOS ESTÁTICOS DE LOS AGENTES ECONÓMICOS

POR
LUCÍA ATZIMBA RUIZ GALINDO

Reporte de Investigación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Economía

Octubre, 2011

1. Modelos estáticos de los agentes económicos

En términos generales, el planteamiento de los modelos de los agentes económicos supone que actúan racionalmente y que existe un gran número de ellos, idénticos y competitivos. Los consumidores toman decisiones de consumo y de participación en el mercado laboral, y derivan utilidad del consumo de los bienes en la economía. Las empresas producen esos bienes y deciden cuánto contratar de mano de obra y capital.

En este trabajo se especifican modelos estáticos para el consumidor y productor, lo cual significa que esos agentes económicos toman sus decisiones en un momento determinado, sin considerar las posibilidades futuras. Las preferencias del consumidor representativo son formuladas mediante la función de utilidad y su racionalidad lo conduce a maximizar esa función sujeta a su restricción presupuestaria. Por su parte, la empresa representativa maximiza sus beneficios de manera directa o a través de la minimización de sus costos, en ambas situaciones están sujetas a un nivel dado de producción.

En ese contexto, se formulan dos modelos para el consumidor representativo, uno que supone que en la economía solo hay un bien y otro, en el que hay dos, en ambos se considera que el consumidor deriva su ingreso del capital y del trabajo, de los cuales es el propietario. Por su parte, el modelo de la empresa representativa supone que solo hay un sector y dos factores productivos, capital y trabajo, con los que se producen los bienes.

2. Modelos estáticos del consumidor

En esta sección se formulan dos modelos para el consumidor representativo, uno en el que se considera que en la economía se produce un solo bien y el otro en el que se producen dos. El bien o los bienes son producidos por un solo sector con dos factores productivos, capital y trabajo.

2.1. Modelos del consumidor en una economía con un solo bien.

Consumo óptimo con un solo bien

El comportamiento racional del consumidor lo conduce a elegir el consumo C, del único bien en la economía, de forma que maximice su función de utilidad sujeta a su restricción presupuestaria, esto es,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u(C) && (1)\\ \text{sujeto a} \quad & \\ & P_C C \leq Y_D. && (2) \end{aligned}$$

donde C es la demanda del único bien en la economía, $P_C \geq 0$ su precio unitario e Y_D es el ingreso disponible del consumidor derivado de los factores de producción que posee: capital (K) y trabajo (L). Obsérvese que el planteamiento de la restricción presupuestaria establece que el consumidor puede gastar parte o todo su ingreso: $P_C C < Y_D$ y $P_C C = Y_D$), respectivamente, en el consumo del bien en la economía.[1]

Como u es una función de utilidad debe ser positiva y estrictamente cóncava en C, es decir, $u_C > 0$ y $u_{CC} < 0$,[2] lo cual significa que la utilidad marginal del consumidor es positiva, pero decreciente, de manera que al consumidor obtiene satisfacción del consumo, pero a medida que aumenta, su satisfacción va disminuyendo.

El lagrangiano de este problema es

$$\mathcal{L} = u(C) - \lambda(Y_D - P_C C),$$

y las condiciones de primer orden son:[3]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \frac{\partial u}{\partial C} - \lambda P_C = 0, \qquad (3)$$

$$Y_D - P_C C \geq 0, \qquad (4)$$

$$\lambda \geq 0, \qquad (5)$$

$$\lambda(Y_D - P_C C) = 0. \qquad (6)$$

[1] Cuando la restricción presupuestal se satisface con desigualdad se dice que es una restricción inactiva y cuando es con igualdad, se denomina una restricción activa.

[2] A través de este trabajo se adopta la siguiente notación:

$$f_{x_h}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

[3] En el contexto de optimización con restricciones de desigualdad, estas expresiones son denominadas condiciones de Kuhn-Tucker.

La condición de holgura (6) establece que si $\lambda > 0$, $Y_D = P_C C$ y en consecuencia, la restricción en (4) está activa y si $\lambda = 0$, $Y_D > P_C C$ y entonces la restricción presupuestaria está inactiva.

Por su parte, la ecuación (3) plantea que la utilidad marginal se puede expresar como λ veces el precio, esto es,

$$u_C = \frac{\partial u}{\partial C} = \lambda P_C,$$

de manera que si $\lambda = 0$, $u_C = 0$ y este resultado no es consistente con los supuestos de la función de utilidad, ya que con base en ellos se debe tener que la utilidad marginal del consumo debe de ser estrictamente positiva, lo cual significa que siempre se obtiene satisfacción del consumo, por ello este caso no es de interés económico. Sin embargo, cuando $\lambda > 0$, $u_C > 0$ y por tanto, la restricción presupuestaria está activa: $Y_D = P_C C$, es decir, en el óptimo, el consumidor gasta todo su ingreso en el consumo del único bien.

En particular, cuando se considera que las preferencias del consumidor representativo están dadas por la siguiente función de utilidad:

$$u(C) = C^\gamma,$$

las condiciones de primer orden del problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad && u(C) = C^\gamma && (7)\\ &\text{sujeto a} && && \\ & && P_C C \leq Y_D, && (8) \end{aligned}$$

son las establecidas de (3) a (6) con

$$u_C = \gamma C^{\gamma-1}.$$

Los dos casos en los que se cumple la condición de holgura (6) son $\lambda = 0$ o $\lambda > 0$. En el primero, se tiene de (3), que

$$u_C = 0,$$

y por tanto, la función de utilidad es cualquier constante, lo cual no es una solución válida desde el punto de vista económico (¿Porque?). En el segundo caso, cuando $\lambda > 0$, se tiene que

$$u_C = \lambda P_C > 0,$$

puesto que $P_C > 0$. Además, la restricción presupuestaria está activa: $Y_D = P_C C$ y en consecuencia, en el óptimo se garantiza que el consumidor gasta todo su ingreso en el consumo del único bien en la economía.[4]

Consumo y ahorro

En esta economía el consumidor representativo debe decidir cómo distribuir su ingreso (Y_D) entre consumo (C) y ahorro (S),[5] de manera que actuando de manera racional deberá seleccionarlos de forma que maximice su función de utilidad sujeta a su restricción presupuestaria, esto es,

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & u(C, S) && (9) \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & Y_D = P_C C + P_S S && (10) \end{aligned}$$

donde P_C y P_S son de manera respectiva el precio de C y el de S. El lagrangiano del problema es

$$\mathcal{L} = u(C, S) + \lambda(Y_D - P_C C - P_S S)$$

[4]En lo que sigue se considera que el consumidor representativo debe gastar todo su ingreso disponible o equivalentemente, que antes de decidir cuánto consumir de los bienes en la economía, selecciona su consumo total.

[5]Es bien sabido que el ahorrar es una decisión intertemproal tal y como se estudiara en los modelos dinámicos del Capítulo 4, sin embargo su introducción en este apartado tiene un doble objetivo. El primero es que en los megas aplicado XXXX

y las condiciones de primer orden son[6]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = u_C - \lambda P_C = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = u_S - \lambda P_S = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Y_D - P_C C - P_S S = 0. \tag{13}$$

Despejando λ de (11) y (12) e igualando las expresiones obtenidas, se tiene que en el óptimo, la tasa marginal de sustitución es igual al precio relativo, esto es,

$$\frac{u_C}{u_S} = \frac{P_C}{P_S} \tag{14}$$

Si en particular se considera que la utilidad está dada por la función

$$u(C, S) = C^{\gamma} S^{1-\gamma},$$

en donde $0 \leq \gamma \leq 1$ representa la participación de C en el consumo total y $1 - \gamma$ la de S, entonces (14) esta dado por

$$\frac{\gamma C^{\gamma-1} S^{1-\gamma}}{(1-\gamma) C^{\gamma} S^{-\gamma}} = \frac{P_C}{P_S}$$

y después de eliminar términos se obtiene

$$(1-\gamma) P_C C = \gamma P_S S. \tag{15}$$

De la restricción presupuestaria en (13), $P_C C = Y_D - P_S S$, de manera que la sustitución de esta expresión en (15) conduce a la demanda óptima de consumo dada por

[6] En este trabajo se adopta la siguiente notación:

$$f_{x_h}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

$$C = \gamma \frac{Y_D}{P_C}.$$

Procediendo de la misma forma para el ahorro, pero ahora sustituyendo $P_S S = Y_D - P_C C$ en (15), lleva a la demanda óptima del ahorro,

$$S = (1 - \gamma) \frac{Y_D}{P_S}.$$

2.2. Modelos del consumidor en una economía con dos bienes.

Independientemente del número de bienes en la economía, un consumidor representativo con comportamiento racional, debe de decidir cómo distribuir su ingreso entre consumo y ahorro, y cuánto demandar de cada uno de los bienes en la economía, de manera que maximice su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria o bien, minimice su gasto total en consumo sujeto a la manera en que se distribuye el consumo total entre los dos bienes en la economía. En esta Sección se estudian ambos modelos

Maximización de la utilidad

En el caso en el que en la economía hay dos bienes, el planteamiento del problema del consumidor es igual a la formulación en (1) y (2), solo que ahora el consumidor debe decidir dado el consumo total, cuánto cuánto consumir de cada uno de los bienes. En esta situación se tienen que elegir C_1, C_2 y S, tales que

$$\text{máx} \quad u(C(C_1, C_2), S) \tag{16}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$Y_D = P_C C + P_S S \tag{17}$$

donde C_i es el consumo del bien i, $i = 1, 2$ y el gasto en el consumo P_C, se distribuye entre el gasto en el consumo del bien uno, $P_1 C_1$, y en el dos, $P_2 C_2$, esto es,

$$P_C C = P_1 C_1 + P_2 C_2. \tag{18}$$

El lagrangiano del problema es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= u(C(C_1, C_2), S) + \lambda(Y_D - P_1C_1 - P_2C_2 - P_SS) && (19)\\
&= u(C(C_1, C_2), S) + \lambda(Y_D - P_CC - P_SS) && (20)
\end{aligned}
$$

y las condiciones de primer orden son

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_i} = u_c - \lambda P_i = 0, \quad i = 1, 2, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = u_S - \lambda P_S = 0 \qquad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0
$$

o equivalentemente,[7]

$$
\begin{aligned}
u_{C_i} &= \lambda P_i, \ i = 1, 2, && (21)\\
u_S &= \lambda P_S, && (22)\\
Y_D &= P_CC - P_SS. && (23)
\end{aligned}
$$

Despejando λ e igualando los resultados se obtiene que en el óptimo, las tasas marginales de sustitución igualan a los precios relativos, esto es,

$$
\frac{u_{C_1}}{u_{C_2}} = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{y} \quad \frac{u_{C_i}}{u_S} = \frac{P_i}{P_S}, \quad i = 1, 2,
$$

y se satisface la restricción presupuestaria

$$
Y_D = P_CC - P_SS.
$$

Si ahora se considera que la utilidad del consumidor representativo es de la forma

$$
u(C, S) = \left(C_1^{\beta} C_2^{1-\beta}\right)^{\gamma} S^{1-\gamma},
$$

la tasa de sustitución entre los consumos es

[7] Observe que

$$
u_C = \frac{\partial u}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial C_i}, \quad i = 1, 2.
$$

$$\frac{u_{C_1}}{u_{C_2}} = \frac{\beta\gamma\left[C_1^{\beta}C_2^{1-\beta}\right]^{\gamma-1}S^{1-\gamma}C_1^{\beta-1}C_2^{1-\beta}}{(1-\beta)\gamma\left[C_1^{\beta}C_2^{1-\beta}\right]^{\gamma-1}S^{1-\gamma}C_1^{\beta}C_2^{-\beta}}.$$

Eliminando términos e igualando al precio relativo se obtiene

$$\frac{\beta C_2}{(1-\beta)C_1} = \frac{P_1}{P_2},$$

que se puede expresar como

$$\beta P_2 C_2 = (1-\beta)P_1 C_1, \tag{24}$$

pero del gasto total en consumo dado en (18) se tiene

$$P_2 C_2 = P_C C - P_1 C_1,$$

de manera que sustituyendo en (24) y reduciendo términos, se llega a que la demanda óptima del bien uno es

$$C_1 = \beta\frac{P_C C}{P_1}.$$

De igual forma, la sustitución de

$$P_1 C_1 = P_C C - P_2 C_2$$

que se obtiene de (18), en (24), conduce a la demanda óptima del bien dos, dada por

$$C_2 = (1-\beta)\frac{P_C C}{P_2}.$$

Por su parte, la tasa de sustitución del bien 1 y el ahorro es

$$\frac{u_{C_1}}{u_S} = \frac{\beta\gamma\left[C_1^{\beta}C_2^{1-\beta}\right]^{\gamma-1} S^{1-\gamma}C_1^{\beta-1}C_2^{1-\beta}}{(1-\gamma)\left[C_1^{\beta}C_2^{1-\beta}\right]^{\gamma} S^{-\gamma}},$$

reduciendo términos e igualando el resultado al precio relativo correspondiente, se obtiene

$$\beta\gamma P_S S = (1-\gamma)P_1C_1.$$

Procediendo de igual forma con el bien dos, conduce a

$$(1-\beta)\gamma P_S S = (1-\gamma)P_2C_2.$$

De estas dos últimas expresiones se llega a

$$\gamma P_S S = (1-\gamma)(P_1C_1 + P_2C_2) = (1-\gamma)P_C C$$

y como $P_C C = Y_D - P_S S$, su sustitución en la expresión anterior finalmente conduce a que en el óptimo,

$$P_S S = (1-\gamma)Y_D.$$

Observe que esta solución es la misma cuando la economía consiste de un solo bien y el consumidor representativo debe decidir además de cuánto consumir, cuánto ahorrar (Sección anterior).

Minimización del gasto total en consumo

La determinación de las demandas óptimas del consumo C_1 y C_2, también se pueden determinar mediante la minimización del gasto total en consumo sujeto a la distribución del consumo total entre cada uno de los dos bienes, esto es,

$$\text{mín} \qquad P_C C = P_1C_1 + P_2C_2 \tag{25}$$

sujeto a

$$C = C(C_1, C_2) \tag{26}$$

3. Modelos estáticos de las empresas

La especificación del modelo de la empresa considera que sólo hay un sector con una empresa representativa que actúa de manera racional y que debe decidir cuánto contratar de mano de obra (L) y capital (K) que se combinan en una función de producción que satisface las propiedades neoclásicas: productos marginales positivos, pero decrecientes y rendimientos constantes a escala o equivalentemente, homogeneidad lineal o de grado uno en cada uno de los factores. Ambos factores están en poder del consumidor representativo

La empresa representativa que actúa racionalmente maximiza sus beneficios de manera directa o a través de la minimización de sus costos, en ambos problemas la función objetivo está sujeta a una función de producción, $F(K, L)$, con las siguientes propiedades:

i) Productos marginales positivos, pero decrecientes:

$$F_K, F_L > 0, \; F_{KK}, F_{LL} < 0.$$

ii) Homogeneidad lineal en cada factor:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \forall \lambda > 0,$$

lo cual a su vez implica que $F_{KK} F_{LL} - F_{KL}^2 = 0$ y $F_{KL} > 0$.

Las características anteriores de F implican que cada insumo es necesario en la producción o equivalentemente, que $F(0, L) = F(K, 0) = 0$. Además, como consecuencia del teorema de Euler para funciones lineales homogéneas la función de producción se puede plantear como

$$F(K, L) = K F_K + L F_L. \tag{27}$$

En toda esta Sección se considera una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala, esto es,

$$F(K, L) = A K^\alpha L^\beta,$$

con $\alpha + \beta = 1$, o equivalentemente,

$$F(K, L) = A K^\alpha L^{1-\alpha},$$

donde A es el índice de productividad, $0 < \alpha < 1$ y $\beta = 1 - \alpha$ son de manera respectiva, la participación del capital y del trabajo en el producto F.

3.1. Maximización del beneficio

El beneficio de la empresa representativa (π) está dado por la diferencia entre sus ingresos y sus gastos (costos), estos últimos corresponden al trabajo y al capital que demandan y que se encuentran en poder del consumidor representativo. Así,

$$\pi(K,L) = PF(K,L) - (rK + wL),$$

donde w es el salario nominal y r es la renta del capital. De esta forma, el problema de la empresa es

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi(K,L) = PF(K,L) - (rK + wL) && (28) \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. && (29) \end{aligned}$$

Sustituyendo (29) en (28) se obtiene el problema equivalente

$$\text{máx}\, \pi(K,L) = PAK^{\alpha}L^{1-\alpha} - (rK + wL) \tag{30}$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = PF_K - r = 0,$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = PF_L - w = 0,$$

de manera que

$$r = PF_K \quad \text{y} \quad w = PF_L,$$

esto es, en el óptimo la renta del capital y el salario reciben como pago su correspondiente producto marginal y como consecuencia, usando el teorema de Euler en (27), se tiene que

$$F(K,L) = rK + wL,$$

lo cual implica que en el óptimo, el beneficio de la empresa es cero.

3.2. Maximización de beneficios vía minimización de costos

El problema planteado en la Sección anterior puede resolverse alternativamente minimizando los costos totales de la empresa, CT, sujetos a su producción, esto es,[8]

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & CT(K,L) = rK + wL && (31) \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. && (32) \end{aligned}$$

Despejando K de (32) se obtiene

$$K = \left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{1-\frac{1}{\alpha}} \tag{33}$$

y sustituyéndola en (31), lleva a un problema equivalente al anterior, pero en función de una sola variable, L, esto es,

$$\text{mín } CT(L) = r\left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{1-\frac{1}{\alpha}} + wL,$$

cuya condición de primer orden es

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} r \left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} L^{-\frac{1}{\alpha}} + w = 0.$$

De esta forma, la demanda óptima de trabajo está dada por

$$L = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha} \frac{F}{A}.$$

[8] Obsérvese que la función objetivo del problema de maximizar los beneficios, se puede expresar como

$$\pi(K,L) = PF(K,L) - CT(K,L)$$

y dado que ésta es separable, el problema del productor se puede solucionar maximizando por un lado $PF(K,L)$ y por el otro, $-CT(K,L)$, sujeto a la producción. Recuérdese que

$$\text{máx} -CT(K,L) = \text{mín}\, CT(K,L)$$

Procediendo de manera similar para el trabajo L, se llega a la demanda óptima del capital, dada por

$$K = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{F}{A}.$$

Sustituyendo estos óptimos en la función objetivo del problema de optimización de costos, se obtiene el costo total mínimo en el que incurre la empresa, dado por

$$\begin{aligned} CT &= \frac{F}{A}\left\{r\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}\right)^{1-\alpha}\right] + w\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{r}{w}\right)^{\alpha}\right]\right\} \\ &= \frac{F}{A}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right] r^{\alpha}w^{1-\alpha} \\ &= \frac{F}{A}\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}\right) r^{\alpha}w^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Finalmente, el problema de maximizar el beneficio se puede formular como sigue:

$$\text{máx}\, \pi(F) = PF - \frac{F}{A}\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}\right) r^{\alpha}w^{1-\alpha}$$

y su condición de primer orden es

$$P = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}\right) r^{\alpha}w^{1-\alpha}$$

de manera que en el óptimo, el precio de cada factor, iguala al costo marginal, tal y como ya se había mostrado.

Bibliografía.

Barro, R. J. y X. Sala-i-Martin, (1995). *Economic Growth.* Advanced Series in Economics, McGraw-Hill.

Chiang, A., (1992). *Elements of Dynamic Optimization.* McGraw-Hill.

Kamien, M. I. y N. L. Schwartz, (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Managment.* Advanced Textbooks in Economics. 2a. ed. North Holland.

Léonard, D. y N. Van-Long, (1994). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge University Press.

Turnovsky, S. J., (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*, 2a. ed., MIT Press.