PRESENTACIÓN

Este documento titulado *Modelos econométricos de ecuaciones simultáneas* (MES), elaborado por la Dra. Lucía A. Ruiz Galindo, es un reporte de investigación del proyecto **Análisis Multivariado de Series de Tiempo**, aprobado por el Consejo Divisional de Ciencias y Humanidades y registrado con el número 607.

El objetivo de este trabajo es estudiar los MES. Se define y se especifica la forma estructural de los MES y en seguida se formula su forma reducida, en ambas se plantean los supuestos que se hacen sobre los términos estocásticos de cada una de ellas. Los MES en su forma estructural se caracterizan porque cada variable endógena es explicada por las demás variables endógenas y por las exógenas en el modelo, mientras que en la forma reducida cada variable endógena es explicada sólo por exógenas, este hecho permite que en la estimación de la forma reducida se utilice el método de mínimos cuadrados ordinarios, caballito de batalla del modelado econométrico.

Posteriormente, se estudia la identificación de los MES, es decir, las condiciones de orden y rango, que permiten analizar la posibilidad de recuperar los parámetros de la forma estructural a partir de los correspondientes a la forma reducida. Cada uno de esos temas es ejemplicado por modelos económicos sencillos que permitan al lector ver su inmediata aplicación.

Dra. Beatriz García Castro
Jefa del Departamento de Economía

MODELOS ECONOMÉTRICOS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

POR
LUCÍA ATZIMBA RUIZ GALINDO

Reporte de Investigación

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Economía

Diciembre, 2011

1. Modelos econométricos de ecuaciones simultáneas

Los modelos econométricos de ecuaciones simultáneas (MES), son sistemas de ecuaciones simultáneas, en los que las ecuaciones pueden ser estocásticas o deterministas, las primeras son las relaciones de comportamiento y las segundas generalmente son identidades: definiciones y/o condiciones de equilibrio. En los MES se pretende explicar un conjunto de variables endógenas en función de ellas mismas y de otras denominadas predeterminadas: endógenas rezagadas y exógeneas.

Se considerará que el MES está constituido por G variables endógenas y K predeterminadas y que para cada una de ellas existen T observaciones. De esta manera, el sistema de ecuaciones simultáneas está integrado por G ecuaciones: relaciones de comportamiento o identidades, una por cada variable endógena, y por un total de $G+K$ variables (endógenas y predeterminadas).

Los MES se pueden presentar en forma estructural o en forma reducida. La primera da cuenta de la simultaneidad entre las variables endógenas y generalmente se deriva de alguna teoría, por lo que cada ecuación denominada también ecuación estructural, describe aspectos específicos de la economía de interés. La segunda se obtiene de la forma estructural y en ella, cada variable endógena se expresa en función sólo de las variables predeterminadas.

2. Forma Estructural (FE)

2.1. Especificación de la FE

La forma estructural de un MES es

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}y_{t1} + \gamma_{12}y_{t2} + \cdots + \gamma_{1G}y_{tG} + \beta_{11}x_{t1} + \beta_{12}x_{t2} + \cdots + \beta_{1K}x_{tK} &= \varepsilon_{t1} \\
\gamma_{21}y_{t1} + \gamma_{22}y_{t2} + \cdots + \gamma_{2G}y_{tG} + \beta_{21}x_{t1} + \beta_{22}x_{t2} + \cdots + \beta_{2K}x_{tK} &= \varepsilon_{t2} \\
\vdots \qquad\qquad &= \vdots \\
\gamma_{G1}y_{t1} + \gamma_{G2}y_{t2} + \cdots + \gamma_{GG}y_{tG} + \beta_{G1}x_{t1} + \beta_{G2}x_{t2} + \cdots + \beta_{GK}x_{tK} &= \varepsilon_{tG},
\end{aligned}$$

donde las y's son las variables endógenas, las x's las predeterminadas, las ε's son los términos estocásticos y las γ's y β's son los parámetros estructurales. El modelo se puede representar de manera matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1G} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \dots & \gamma_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \\ \vdots \\ y_{tG} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \dots & \beta_{GK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ \vdots \\ x_{tK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{t1} \\ \varepsilon_{t2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{tG} \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\Gamma y_t + B x_t = \varepsilon_t, \ \forall t = 1, \dots, T, \tag{1}$$

donde Γ es una matriz $G \times G$ asociada a los parámetros de las variables endógenas, B es la de las variables predeterminadas y es de dimensión $G \times K$, y $y_t, \ x_t$ y ε_t son de manera respectiva, los vectores asociados a las variables endógenas, a las predeterminadas y a las perturbaciones estocásticas de cada ecuación de comportamiento, sus dimensiones son de manera respectiva $G, \ K$ y G.

Obsérvese que el renglón i-ésimo de Γ y de B tiene los parámetros de la i-ésima ecuación estructural, los correspondientes a las variables endógenas y las predeterminadas, de manera respectiva; la columna j-ésima de Γ tiene los parámetros estructurales de la j-ésima variable endógena y la k-ésima de B, los correspondientes a la k-ésima variable predeterminada.

El modelo para todas las observaciones está dado por

$$\Gamma Y' + B X' = \varepsilon \tag{2}$$

donde Y es una matriz con todas las observaciones de las variables endógenas, X es la de las variables predeterminadas y ε es la de los términos estocásticos, esto es,

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1G} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t1} & y_{t2} & \dots & y_{tG} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{T1} & y_{T2} & \dots & y_{TG} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{t1} & x_{t2} & \dots & x_{tK} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{TK} \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1G} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2} & \dots & \varepsilon_{tG} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{T1} & \varepsilon_{T2} & \dots & \varepsilon_{TG} \end{pmatrix}.$$

El objetivo es estimar los parámetros estructurales, los de las matrices Γ y B a partir de las T observaciones. Finalmente, cabe mencionar que generalmente se normalizan las ecuaciones del sistema, de forma que en cada ecuación la variable endógena que se quiere analizar en esa ecuación, tenga coeficiente 1, esto es, si $\gamma_{gg} \neq 1, \quad g = 1, \ldots, G$, entonces se multiplica la ecuación g por $\frac{1}{\gamma_{gg}}$, con esto, la matriz Γ solo tiene unos en su diagonal.

2.2. Supuestos de la FE

$$\text{FE:} \;\; \Gamma y_t + B x_t = \varepsilon_t$$

S1. $E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}_{G\times 1}, \quad \forall t = 1, \ldots, T$

S2. $Cov(\varepsilon_t) = \Sigma$

$$\begin{aligned}
Cov(\varepsilon_t) &= E[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))'] \\
&= E(\varepsilon_t \varepsilon_t') \\
&= E\begin{pmatrix} \varepsilon_{t1}\varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t1}\varepsilon_{t2} & \ldots & \varepsilon_{1t}\varepsilon_{tG} \\ \varepsilon_{t2}\varepsilon_{t1} & \varepsilon_{t2}^2 & \ldots & \varepsilon_{t2}\varepsilon_{tG} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{tG}\varepsilon_{t1} & \varepsilon_{tG}\varepsilon_{t2} & \ldots & \varepsilon_{tG}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1G} & \sigma_{2G} & \ldots & \sigma_{GG} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{\Sigma}_{G\times G}
\end{aligned}$$

S3. $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s') = \mathbf{0}_{G\times G}, \quad \forall t \neq s.$

El supuesto S2 implica que puede existir correlación entre los términos estocásticos de las diferentes ecuaciones, lo cual es esencial en los MES y por ello no se debe de estimar ecuación por ecuación cuando se supone alguna distribución específica para los términos estocásticos, por ejemplo la normal

$$\varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}),$$

la estimación de los parámetros debe de hacerse considerando el sistema completo. Por su parte, el supuesto S3 plantea que los errores no estan autocorrelacionados en el tiempo.

Ejemplo 2.1. *Forma estructural de un modelo de consumo*

La FE del modelo que se plantea a continuación está constituida por dos ecuaciones de comportamiento y una identidad,

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha_1 Y_1 + \beta_1 + \varepsilon_{tC}, && (3) \\ I_t &= \alpha_2 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 + \varepsilon_{tI}, && (4) \\ Y_t &= C_t + I_t + G_t, && (5) \end{aligned}$$

donde C_t es el consumo, I_t la inversión, Y_t el ingreso y G_t es el gasto, todas ellas en $t = 1, \ldots, T$. Las variables endógenas son C_t, I_t, y Y_t, las predeterminadas Y_{t-1} y G_t. El modelo se puede expresar en forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

en donde

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y_t = \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Forma Reducida (FR)

3.1. Especificación de la FR

La forma reducida expresa cada variable endógena como combinación lineal de las variables predeterminadas y el término estocástico y se obtiene de la FE planteada en (1), premultiplicándola por Γ^{-1}, lo cual hace suponer que $|\Gamma| \neq 0$. Así, la FR de (1) es

$$y_t = -\Gamma^{-1} B x_t + \Gamma^{-1} \varepsilon_t \tag{7}$$

o bien,

$$y_t = \Pi x_t + \upsilon_t, \tag{8}$$

donde $\Pi = -\Gamma^{-1}B$ y $\upsilon_t = \Gamma^{-1}\varepsilon_t$.

3.2. Supuestos de la FR

Los supuestos de la FR se obtienen de los de la FE, como se muestra a continuación.

S1. $E(\upsilon_t) = \mathbf{0}$ $\forall t = 1, \ldots, T$, ya que

$$E(\upsilon_t) = E(\Gamma^{-1}\varepsilon_t) = \Gamma^{-1}E(\varepsilon_t) = \mathbf{0}_{G\times 1}$$

S2. $Cov(\upsilon_t) = \Omega$, donde $\Omega = \Gamma^{-1}\Sigma\Gamma^{-1\prime}$, puesto que

$$\begin{aligned} Cov(\upsilon_t) &= E[(\upsilon_t - E(\upsilon_t))(\upsilon_t - E(\upsilon_t))'] \\ &= E(\upsilon_t {\upsilon_t}') = E(\Gamma^{-1}\varepsilon_t {\varepsilon_t}'\Gamma^{-1\prime}) \\ &= \Gamma^{-1}E(\varepsilon_t\varepsilon_t')\Gamma^{-1\prime} \\ &= \Gamma^{-1}\Sigma\Gamma^{-1\prime} \\ &= \Omega_{G\times G},\ \forall t. \end{aligned}$$

S3. $Cov(\upsilon_t, {\upsilon_s}') = \mathbf{0},\ \forall t \neq s$, ya que

$$\begin{aligned} Cov(\upsilon_t, {\upsilon_s}') &= E(\upsilon_t {\upsilon_s}') \\ &= E(\Gamma^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_s'\Gamma^{-1\prime}) \\ &= \Gamma^{-1}E(\varepsilon_t\varepsilon_s')\Gamma^{-1\prime} \\ &= \Gamma^{-1}\mathbf{0}\Gamma^{-1\prime} \\ &= \mathbf{0}_{G\times G},\ \forall t. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1. *Forma reducida del modelo de consumo*

La FR del modelo de consumo en (3)-(5) del ejemplo anterior, se obtiene premultiplicando su representación matricial en (6) por su correspondiente Γ^{-1}, tal y como se muestra a continuación.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_3 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} \beta_1-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2 & -1 \\ \alpha_2\beta_1+\beta_3-\alpha_1\beta_3 & \beta_2-\alpha_1\beta_2 & -\alpha_2 \\ \beta_1+\beta_3 & \beta_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Pi} &= \frac{-1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} \beta_1-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2 & -1 \\ \alpha_2\beta_1+\beta_3-\alpha_1\beta_3 & \beta_2-\alpha_1\beta_2 & -\alpha_2 \\ \beta_1+\beta_3 & \beta_2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{-1}{1-\alpha_1-\alpha_2}(\beta_1-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3), \\
\pi_{12} &= \frac{-1}{(1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1\beta_2, \\
&\vdots \\
\pi_{33} &= \frac{-1}{1-\alpha_1-\alpha_2}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{pmatrix} u_{tC} \\ u_{tI} \\ u_{tY} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \begin{pmatrix} 1-\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{tC} \\ \varepsilon_{tI} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

La FR del modelo de consumo es

$$\begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ G_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{tC} \\ u_{tI} \\ 0 \end{pmatrix},$$

en ella cada variable endógena se encuentra en función de las variables predeterminadas y del término estocástico.

3.3. Propiedades de y_t

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(\Pi x_t + \upsilon_t) \\ &= E(\Pi x_t) + E(\upsilon_t) \\ &= \Pi x_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(y_t) &= E[(y_t - E(y_t))(y_t - E(y_t))'] \\ &= E[(y_t - \Pi x_t)(y_t - \Pi x_t)'] \\ &= E(\upsilon_t \upsilon_t') \\ &= \Omega_{G\times G}, \ \forall t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_s) &= E[(y_t - E(y_t))(y_s - E(y_s))'] \\ &= E[(y_t - \Pi x_t)(y_s - \Pi x_s)'] \\ &= E(\upsilon_t \upsilon_s') \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

4. Identificación del modelo

Dado que en la FR las variables endógenas de cada ecuación ya no dependen de variables endógenas de las otras ecuaciones del sistema y que el término estócastico es homoscedástico y no autocorrelacionado entonces, cada ecuación del MES se puede estimar por MCO. La pregunta ahora es ¿Se pueden recuperar los parámetros de la FE con los de los de la FR?

$$\widehat{\Pi}, \widehat{\Omega} \longrightarrow \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\Sigma}$$

La FR resume toda la información relevante disponible de la muestra.

- Una ecuación de la FE está *identificada* si todos sus parámetros pueden ser estimados a partir de los estimadores de la FR. De no ser así, la ecuación no está identificada.
- Una ecuación identificada está *exactamente identificada* si existe una única forma de calcular los parámetros de la FE a partir de los de la FR y es una ecuación sobreidentificada si existen más formas.
- Un MES está identificado si todas sus ecuaciones lo están, y no lo está, si al menos una ecuación no está identificada.

Total de parámetros a estimar

	Γ	B	Σ
FE:	$G^2 - G$	$G - K$	$\frac{G^2(G-1)}{2}$
	Π	Ω	
FR:	GK	$\frac{G^2(G-1)}{2}$	

4.1. Identificación del MES en su FR

Sin pérdida de generalidad se supone que se va a identificar la primera ecuación utilizando la FR

$$y_t = \Pi x_t + \upsilon_t,$$

donde $\Pi = -\Gamma^{-1}B$ o bien, $\Gamma\Pi = -B$. Se considerará además que la ecuación a identificar tiene g variables endógenas y k predeterminadas y por tanto, $G-g$ y $K-k$ son las endógenas y las predeterminadas excluídas de esa ecuación. La especificación de esa ecuación en la FE es

$$\gamma_{11}y_{t1} + \cdots + \gamma_{1g}y_{tg} + \beta_{11}x_{t1} + \cdots + \beta_{1k}x_{tk} = \varepsilon_t.$$

Haciendo una partición adecuada de las matrices Γ, B y Π se tiene

$$\Gamma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1g} & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & & & \\ & & \Gamma_1 & & & \Gamma_2 & \end{array} \right)$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & & & \\ & & B_1 & & & B_2 & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1k} & \pi_{1(k+1)} & \dots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2k} & \pi_{2(k+1)} & \dots & \pi_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{g1} & \pi_{g2} & \dots & \pi_{gk} & \pi_{g(k+1)} & \dots & \pi_{gK} \\ \hline \pi_{(g+1)1} & \pi_{(g+1)2} & \dots & \pi_{(g+1)k} & \pi_{(g+1)(k+1)} & \dots & \pi_{(g+1)K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \dots & \pi_{Gk} & \pi_{G(k+1)} & \dots & \pi_{GK} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_3 & \Pi_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\Pi = -\Gamma^{-1}B,\ \Gamma\Pi = -B$, para la primera ecuación este producto es:

$$(\gamma_{11}\gamma_{12}\dots\gamma_{1g} \mid 0\dots 0) \left(\begin{array}{c|c} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \hline \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} \right) = (\beta_{11}\beta_{12}\dots\beta_{1k} \mid 0\dots 0)$$

o bien,

$$(\gamma_{11}\gamma_{12}\dots\gamma_{1g})\Pi_1 + 0\Pi_3 \;=\; -(\beta_{11}\beta_{12}\dots\beta_{1k}), \tag{9}$$
$$(\gamma_{11}\gamma_{12}\dots\gamma_{1g})\Pi_2 + 0\Pi_4 \;=\; 0. \tag{10}$$

Identificar es resolver este sistema para las γ_{ij} y β_{1j} dados los parámetros en las matrices Π's. Primero se soluciona (10) para obtener las γ's, en seguida se sustituyen en (9) y se resuelve para obtener las β's. Nótese que Π_2 es la matriz de parámetros de la FR asociada a las variables predeterminadas excluídas de la primera ecuación, y las variables a determinar en ese subsistema son las primeras g endógenas incluídas.

Condición de rango (CR)

El sistema en (10) es homogéneo constituido por $K-k$ ecuaciones lineales en g variables. ¿Cuándo (10) tiene solución única diferente a la trivial? Tiene solución distinta de cero si y sólo si el rango de Π_2 es igual al número de variables endógenas en las ecuaciones menos uno, esto es,[1]

$$\rho(\Pi_2) = g - 1, \tag{11}$$

Ésta se denomina la *condición de rango*, es una condición necesaria y suficiente que deben satisfacer los coeficientes de la matriz Π_2 para que los parámetros estructurales puedan ser obtenidos a partir de los de la forma reducida. En este contexto, la identificación consiste en resolver para las γ's y β's dadas las π's. Cuando la condición de rango se satisface, la primera ecuación se dice que está identificada y si se cumple para las G ecuaciones del MES se dice que el modelo está identificado.

Observe que si $\rho(\Pi_2) = g$ el sistema en (10) tiene solución única, la solución trivial,

$$\gamma_{12} = \cdots = \gamma_{1k} = \beta_{11} = \beta_{12} = \cdots = \beta_{1g} = 0,$$

y si $\rho(\Pi_2) < g - 1$, tiene un número infinito de soluciones diferentes de cero (después de la normalización).

Condición de orden (CO)

La condición de rango establece que es necesario que $\rho(\Pi_2) = g - 1$. Además como la dimensión de Π_2 es $g \times (K-k)$,[2]

$$g - 1 = \rho(\Pi_2) \leq \min\{g, K-k\}.$$

Cuando el mínimo es g, la condición $g - 1 < g$ siempre se satisface, mientras que si el mínimo es $K-k$

$$g - 1 \leq K - k$$

no siempre se cumple. Esta última condición establece que el número de variables endógenas incluídas en la primera ecuación menos uno, debe ser menor que el de variables predeterminadas excluídas de la misma. y se denomina *condición de orden* para la FR y como puede observarse es necesaria, pero no suficiente. Si la CO se satisface de manera estricta,

[1] El rango es el número de columnas o renglones linealmente independientes. Si la matriz es cuadrada y su determinante es diferente de cero, entonces todas sus filas y columnas son linealmente independientes.

[2] $A_{m\times n},\ \rho(A) \leq \min(m,n)$.

se dice que la primera ecuación está *sobreidentificada*, si se satisface como igualdad se dice que está *exactamente identificada* y si no se satisface entonces está *subidentificada* (no identificada).

De lo anterior, la ecuación puede o no estar identificada, puesto que

i) Si $\rho(\Pi_2) = g - 1$ y $K - k > g - 1$, la ecuación está sobreidentificada.

ii) Si $\rho(\Pi_2) = g - 1$ y $K - k = g - 1$, la ecuación está exactamente identificada.

iii) Si $\rho(\Pi_2) = g - 1$ y $K - k < g - 1$, la ecuación está subidentificada.

iv) Si $\rho(\Pi_2) < g - 1$, la ecuación no está identificada.

4.2. Condiciones alternativas de identificación

Hasta aquí, todas las condiciones se basan en la FR, ¿existe una contraparte en la FE? Sea

$$\begin{aligned}
A &= (\Gamma|B) \\
&= \begin{pmatrix}
\gamma_{11} & \dots & \gamma_{1k} & 0 & \dots & 0 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1k} & 0 & \dots & 0 \\
\gamma_{21} & \dots & \gamma_{2k} & \gamma_{2k+1} & \dots & \gamma_{2K} & \beta_{21} & \dots & \beta_{2k} & \beta_{2k+1} & \dots & \beta_{2K} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\gamma_{G1} & \dots & \gamma_{Gk} & \gamma_{Gk+1} & \dots & \gamma_{GK} & \beta_{G1} & \dots & \beta_{Gk} & \beta_{Gk+1} & \dots & \beta_{GK}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma'_{1\times g} & 0 & \beta' & 0_{1\times(K-k)} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & B_1 & B_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

A es de dimensión $G \times (G + K)$. Premultiplicando por Γ^{-1}

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}A &= (I_{G\times G}|B^{-1}\Gamma) \\
&= (I_{G\times G}| - \Pi_{G\times k}) \\
&= \begin{pmatrix} I_{g\times g} & \mathbf{0}_{g\times(G-g)} & | & -\Pi_1 & -\Pi_2 \\ \mathbf{0}_{(G-g)\times(G-g)} & I_{(G-g)\times(G-g)} & | & -\Pi_3 & -\Pi_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Se define

a) $A_{EG\times G-g+K-k} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \\ \Gamma_2 & | & B_2 \end{pmatrix},$

$$\Gamma^{-1}A_E = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\Pi_2 \\ I_{G-g} & -\Pi_4 \end{pmatrix},$$

b) $D_{(G-g+K-k)} = \begin{pmatrix} I & -\Pi_4 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$,

$$\Gamma^{-1} A_E D = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_2 \\ I_{G-g} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Al premultiplicar por Γ^{-1} y posmultiplicar por D no cambia el rango de A_E.

Condición de rango para la FE

La matriz de variables excluídas de la primera ecuación $(\Gamma_2|B_2)$ es de dimensión $(G-1) \times (G-g+K-k)$ y como $(G-1) \leq (G-g+K-k)$

$$\begin{aligned} \rho(A_E) &= \rho(\Gamma_2|B_2) \\ &= G-1, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} G-1 &= \rho(A_E) \\ &= \rho(\Gamma_2^{-1} A_E D) \\ &= \rho(I) + \rho(\Pi_2) \\ &= G-g+\rho(\Pi_2) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\rho(\Pi_2) = g-1,$$

esto es,

$$\rho(\Gamma_2|B_2) = G-1 \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(\Pi_2) = g-1,$$

La *condición de rango* en la FE establece que la primera ecuación esta identificada cuando $\rho(\Gamma_2|B_2) = G-1$, es decir, la matriz de parámetros de la FE asociados a las variables excluídas de la primera ecuación, en las demás ecuaciones tiene rango $G-1$ (número de variables endógenas en el sistema menos uno).

Condición de orden para la FE

La condición de orden es la misma que la de la FR, ya que

$$G-1 = \rho(\Gamma_2|B_2) \leq \text{mín}\{G, G-g+K-k\}$$

y $G-1 \leq G$ siempre se satisface, mientras que cuando el mínimo se alcanza en $K-k$,

$$G-1 \leq G-g+K-k \;\Leftrightarrow\; g-1 \leq K-k.$$

Bibliografía.

Castro, C., Loría E. y M. A. Mendoza, (2000). *EUDOXIO. Modelo Macroeconómico de la Economía Mexicana.* Facultad de Economía, UNAM.

Intriligator, M., (1990). *Modelos econométricos, técnicas y aplicaciones.* FCE.

Judge, G. G. *et al*, (1985). *The Theory and Practice of Econometrics.* John Wiley & Sons.

Lucas, R. E. (1976). "Econometric Policy Analysis: A critique..en K. Brunner y A. Meltzer (1976), *Philliphs: Curve and Labor Markets.* North Holland.

Maddala, G. S., (1977). *Econometrics.* McGraw-Hill.

Maddala, G. S., (1996). *Introdución a la Econometría.* Prentice Hall.

Pindyck, R. S. y D. L. Rubinfeld (1991). *Econometrics Models and Economic Forecasts.* McGraw-Hill.

Plata, L. y L. A. Ruiz, (1997). "Notas sobre la evolución del análisis cuantitativo: econometría y métodos alternativos.", *Gaceta de Economía* 2. ITAM.

Theil, H., (1971). *Principles of Econometrics.* John Wiley & Sons.

Urzúa, C. M., G. Esquivel, L. M. Lagunes y J. L. de la Cruz. *Proyecto ECONOMEXICO 1. Un espacio de acercamiento para la comprensión de la Macroeconometría.* Centro de Estudios Económicos, COLMEX.